Calculatrices autorisées — Durée : 2 heures
Le sujet complété devra être rendu dans la copie

NOM : **PRÉNOM :** **CLASSE :**

EXERCICE 1 /5

Cet exercice est un Questionnaire à Choix Multiples. Vous donnerez votre réponse dans la colonne de droite. Aucune justification n'est demandée. *Une réponse fausse n'enlève pas de point.*

	Rép.
1. La mesure principale de l'angle $x = \frac{197\pi}{3}$ est : **a.** $-\frac{\pi}{3}$ **b.** $\frac{5\pi}{3}$ **c.** $-\frac{5\pi}{3}$ **d.** $\frac{2\pi}{3}$	
2. La dérivée de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{-3x^2+2}{5-4x}$ est : **a.** $\dfrac{3x}{2}$ **b.** $\dfrac{12x^2-30x+8}{(5-4x)^2}$ **c.** $\dfrac{-12x^2+30x-8}{(5-4x)^2}$ **d.** $\dfrac{12x^2-30x+8}{(5-4x)}$	
3. On donne un nombre $x \in]-\pi\,;0]$ tel que $\cos x = \frac{\sqrt{15}}{8}$. Quelle est la valeur de $\sin x$? **a.** $\frac{\sqrt{7}}{8}$ **b.** $-\frac{\sqrt{7}}{8}$ **c.** $\frac{7}{8}$ **d.** $-\frac{7}{8}$	
4. Les solutions de l'inéquation $x^2 - x - 1 \geqslant 0$ sont **a.** $]-\infty\,;+\infty[$ **b.** $[-0,62\,;1,62]$ **c.** $]-\infty\,;-0,62]\cup[1,62\,;+\infty[$ **d.** $\left]-\infty\,;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,;+\infty\right[$	
5. On donne le point $A(3\,;1)$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$. Une équation cartésienne de la droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est : **a.** $2x-y-5=0$ **b.** $x-3y=0$ **c.** $2x+y=7$ **d.** $-x+2y+1=0$	

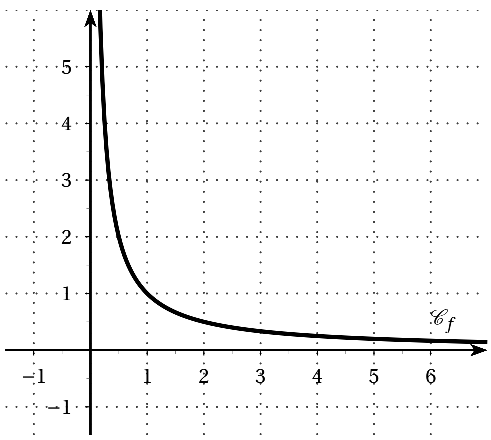
EXERCICE 2 /7,5

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$, $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
On considère deux points de $\mathscr{C}_f$: A et B d'abscisses respectives $\frac{1}{2}$ et 5.

On note I le milieu de $[AB]$,

1. (a) Justifier que $A\left(\frac{1}{2}\,;2\right)$ et $B\left(5\,;\frac{1}{5}\right)$.
   (b) Placer les points sur le graphique ci-contre.
   (c) Calculer les coordonnées de I, puis placer le point dans le repère.

T_A et T_B sont les tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points A et B. J est le point d'intersection de T_A et T_B et M est le point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $[IJ]$.
T_M est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point M.



2. (a) Prouver que l'équation de T_A est $y = -4x+4$ et que celle de T_B est $y = -\frac{1}{25}x + \frac{2}{5}$.
   (b) Faire apparaître approximativement les tangentes sur la figure.
   (c) Déterminer les coordonnées du point J, intersection des deux droites T_A et T_B.
3. (a) Trouver l'équation réduite de la droite (IJ).
   (b) M est l'intersection entre (IJ) et $\mathscr{C}_f$. Démontrer que M a pour coordonnées $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\,;\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{2}}}\right)$.
4. Prouver que la droite T_M, tangente à $\mathscr{C}_f$ en M, est parallèle avec la droite (AB).

EXERCICE 3 /7,5

M. Busscarolle a une fille, Louise qui est née en 2008. Il ouvre à sa naissance un compte épargne dans lequel il place une somme de 100€. Tous les ans, ce compte est rémunéré par la banque à un taux de 2 % et M. Busscarolle ajoute à cette somme un montant de 600€.

On appelle u_n le montant, en euros, d'argent disponible sur le compte de Louise à l'année $2008+n$. On peut donc admettre que $u_0 = 100$.

1. Justifier rapidement que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,02 \times u_n + 600$.
   Le but de l'exercice est d'étudier cette suite (u_n).
2. Premiers résultats sur cette suite.
   (a) Calculer les termes u_1 et u_2 de la suite.
   (b) Démontrer que (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
   (c) Écrire un algorithme, en langage naturel, qui permet d'obtenir n'importe quel terme u_n de la suite, le nombre n étant entré par l'utilisateur.
3. Utilisation d'une suite auxiliaire.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n + 30\,000$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Donner sa raison et son premier terme.
   (b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
   (c) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 30\,100 \times 1,02^n - 30\,000$
   (d) En déduire la somme disponible sur son compte l'année de ses 18 ans.
4. Étude d'un algorithme.

Entrée	Entrer la valeur A
Traitement	U prend la valeur 100
	n prend la valeur 0
	Tant que $U < A$ **Faire**
	U prend la valeur $U \times 1,02 + 600$
	n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que
Sortie	Afficher n

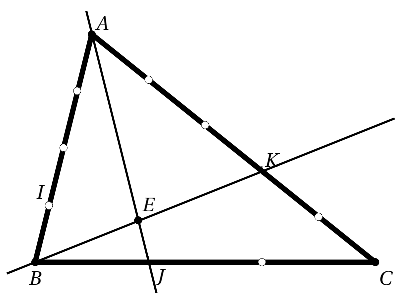
   (a) Faire tourner cet algorithme pour $A = 3\,000$ et compléter le tableau suivant :

U	100							
n	0	1						

   Que représente la valeur n affichée en sortie ?
   (b) Au bout de combien d'années le capital sur le compte de Louise atteindra-t-il 10 000€, si elle ne touche pas à son compte jusque là ?
   Plusieurs raisonnements sont possibles, et dans tous les cas, vous justifierez votre résultat.

EXERCICE 4 Géométrie — Hors barème

ABC est un triangle quelconque.
Le point I est tel que $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$.
Le point J est tel que $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$.
Le point K est tel que $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$.
E est le point d'intersection des droites (BK) et (AJ).



Démontrer que les droites (AJ), (BK) et (CI) sont concourantes.