$1^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mardi 12 mai 2015 (3 heures)

• Le barème est donné sur 40.

• On répondra directement sur la copie fournie avec le sujet.

• Un certain nombre de questions nécessite une recherche préalable au brouillon. On ne rédigera sur la copie qu'après avoir effectué cette recherche.

• Il est demandé de ne rien écrire sur le sujet et, en particulier, de ne rien marquer sur les figures.

I. (4 points)

Cet exercice est un QCM composé de 4 questions. Pour chaque question, trois réponses sont proposées ; une seule réponse est exacte.
Compléter le tableau donné sur la feuille de réponses avec les lettres A, B, C correspondant aux réponses choisies.
Aucune justification n'est attendue.
Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 1 point. Aucun point n'est retiré en l'absence de réponse.

On considère la suite arithmétique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0 = -\dfrac{5}{3}$ et de raison $\dfrac{1}{3}$.

On note (v_n) la suite définie par $v_n = \sqrt{u_n}$.

1°) Pour tout entier naturel *n*, on a :

A. $u_{n+1} - \dfrac{1}{3} = u_n$ B. $u_n - \dfrac{1}{3} = u_{n+1}$ C. $\dfrac{u_n}{3} = u_{n+1}$

2°) Pour tout entier naturel *n*, $1 - u_n$ est égal à :

A. $-\dfrac{n+2}{3}$ B. $\dfrac{2-n}{3}$ C. $\dfrac{8-n}{3}$

3°) Pour tout entier naturel *n*, la somme $u_0 + u_1 + ... + u_n$ est égale à :

A. $\dfrac{n^2 - 10n}{6}$ B. $\dfrac{n^2 - 9n - 10}{6}$ C. $\dfrac{2n^2 - 18n - 20}{3}$

4°) La suite (v_n) est définie à partir de l'indice :

A. 0 B. 5 C. 6

II. (3 points)

Soit A et B deux points distincts fixés du plan.
On pose $AB = a$. On note A_0 le milieu de [AB], A_1 le milieu de $[A_0B]$, A_2 le milieu de $[A_1B]$.
On construit une suite de points A_n tels que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, A_n est le milieu du segment $[A_{n-1}B]$.
On pose $d_0 = AA_0$, et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $d_n = A_{n-1}A_n$.

1°) Exprimer d_{n+1} en fonction de d_n. On ne demande pas de justifier.
En déduire la nature de la suite (d_n). On répondra par une phrase en donnant toutes les précisions utiles.

2°) Démontrer que l'on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} d_k = a\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ (*n* étant un entier naturel quelconque).

III. (5 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 2}$ pour tout entier naturel *n*.

1°) On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel *n* donné, tous les termes de la suite, de l'indice 0 à l'indice *n*.
Parmi les trois algorithmes ci-contre, un seul convient.
Préciser lequel sans justifier la réponse.

Algorithme 1

Saisir *n*
U prend la valeur 1
Pour *i* allant de 1 à *n* **Faire**
  U prend la valeur $\dfrac{U}{U+2}$
FinPour
Afficher *U*

Algorithme 2

Saisir *n*
U prend la valeur 1
Pour *i* allant de 1 à *n* **Faire**
  U prend la valeur 1
  Afficher *U*
  U prend la valeur $\dfrac{U}{U+2}$
FinPour

Algorithme 3

Saisir *n*
U prend la valeur 1
Pour *i* allant de 1 à *n* **Faire**
  Afficher *U*
  U prend la valeur $\dfrac{U}{U+2}$
FinPour
Afficher *U*

2°) On admet que pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n \neq 0$.
Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.
a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
b) En déduire que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n = \dfrac{1}{2^{n+1} - 1}$.

IV. (7 points)

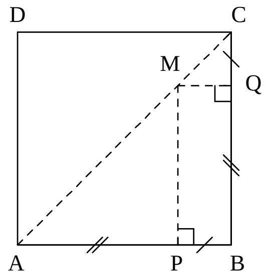
Lors d'un jeu, un joueur doit effectuer 10 parties indépendantes. La probabilité de gagner chaque partie est égale à $\frac{1}{4}$.

1°) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.
a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?
Répondre par une phrase, sans justifier, en donnant toutes les précisions utiles.
b) Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie ? Le résultat sera arrondi au millième.
c) Quelle est la probabilité que le joueur gagne au plus 5 parties ? Le résultat sera arrondi au millième.
d) Déterminer l'espérance de X.

2°) Le joueur doit payer 30 € pour jouer les 10 parties. Chaque partie gagnée lui rapporte 8 €. Chaque partie perdue lui fait perdre 2 €.
On note Y le gain algébrique du joueur en euros (en tenant compte de la mise de 30 €).
a) Exprimer Y en fonction de X.
b) Calculer l'espérance de Y.
c) Calculer la probabilité pour le joueur d'avoir un gain strictement supérieur à 10 €.
Le résultat sera arrondi au millième.

V. (11 points)

Soit ABCD un carré de côté 1. Pour tout point M du segment [AC], on note P et Q ses projetés orthogonaux respectivement sur les droites (AB) et (BC). On pose $x = \text{AP}$. Aucune figure n'est demandée sur la copie.



1°) Dans cette question, M est un point quelconque de [AC].
On pourra utiliser directement les résultats suivants : $\text{BQ} = x$, $\text{BP} = 1 - x$, $\text{CQ} = 1 - x$.
a) Exprimer les produits scalaires $\overrightarrow{\text{DM}} \cdot \overrightarrow{\text{PB}}$ et $\overrightarrow{\text{DM}} \cdot \overrightarrow{\text{BQ}}$ en fonction de *x*.
b) En déduire que la droite (DM) est perpendiculaire à la droite (PQ).

2°) Dans cette question, M est un point quelconque de [AC].
Démontrer que le produit scalaire $\overrightarrow{\text{DP}} \cdot \overrightarrow{\text{DQ}}$ est indépendant de *x*.

3°) Dans cette question, on place M au milieu de [AC] ; P et Q sont alors les milieux respectifs de [AB] et [BC]. On note θ la mesure en radians de l'angle $\widehat{\text{PDQ}}$.
À l'aide de la question précédente, calculer $\cos\theta$.

4°) Dans cette question, M est un point quelconque de [AC].
On note I le milieu du segment [PQ].
a) Exprimer DI^2 en fonction de *x*.
On mettra en évidence la formule utilisée et l'on donnera le résultat final sous forme développée réduite après avoir effectué les calculs au brouillon.
b) Déterminer le (ou les) réel(s) *x* tel(s) que $\text{DI} = \sqrt{2}\,\text{PQ}$ (valeurs exactes).

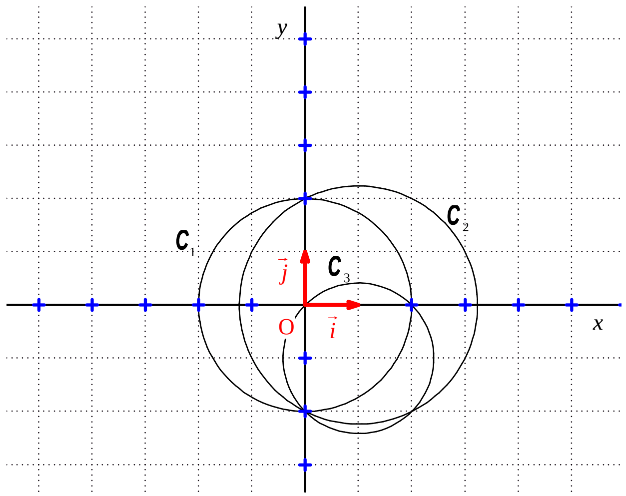
Dans les exercices **VI** et **VII**, le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

VI. (5 points)

1°) Attribuer les équations cartésiennes suivantes à chacun des cercles du graphique ci-dessous.

a) $x^2 + y^2 - 4 = 0$; b) $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$; c) $x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$.

On justifiera uniquement pour l'équation b).



2°) On note *D* la droite d'équation cartésienne $x - 2y + 4 = 0$.
Démontrer que *D* est tangente à l'un des trois cercles précédents.

VII. (5 points)

On donne les points E et F de coordonnées respectives (2 ; 0) et $\left(1 ; \sqrt{3}\right)$.
On note Γ le cercle de centre E passant par O et Δ la droite passant par O et perpendiculaire à (OF).

1°) Déterminer une équation cartésienne de Γ et de Δ.

2°) Vérifier rapidement que $\text{F} \in \Gamma$ (en une ligne).

3°) La droite Δ coupe le cercle Γ en O et en un point G distinct de O.
Déterminer par le calcul les coordonnées de G.

4°) On se propose de retrouver les coordonnées de G par une autre méthode.
Démontrer que [FG] est un diamètre de Γ. En déduire les coordonnées de G.

$1^{ère}$ S1

Nom : ……………………

Prénom : …………………

Contrôle du 12 mai 2015
Copie à rendre

I	II	III	IV	V	VI	VII	Total/40	Total/20

I. (4 points)

Question	1	2	3	4	Total
Réponse					

II. (3 points)

1°) $\forall n \in \mathbb{N}$ ………………………………………… (une seule égalité)

………

………

………

2°) ………………………………………………………………………………………………………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

III. (5 points)

1°) Algorithme choisi : algorithme N°….

2°) ………………………………………………………………………………………………………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

IV. (7 points)

1°) a) ……………………………………………………

……………………………………………………

b) ……………………………………………………

c) ……………………………………………………

d) ……………………………………………………

2°) a) ……………………………………………………

b) ……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

c) ……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

V. (11 points)

1°) ……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

Suite de l’exercice V.

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

2°) ……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

3°) ……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

4°)

a) ……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

b) ……

VI. (5 points)

1°) a) …… b) …… c) ……

2°) ……

VII. (5 points)

1°) ……

2°) ……

3°) ……

4°) ……

Un élève m’a demandé durant l’épreuve si, pour l’exercice **V**, on pouvait « créér » (introduire) de nouveaux points.
J’ai dit que je ne préférais pas mais que je ne m’y opposais pas complètement.

Corrigé du contrôle du 12-5-2015

I.

Question	1	2	3	4	Total
Réponse	A	C	B	B	

II.

Il semble que beaucoup d'élèves n'aient pas bien compris la notation $A_{n-1}A_n$ et n'aient pas vu qu'il s'agissait d'une distance (distance entre les points A_{n-1} et A_n).
Peut-être aurait-on dû écrire dans l'énoncé « On note d_n la distance $A_{n-1}A_n$ ».

Peut-être aurait-on dû donner d'autres noms aux points A_0, A_1, A_2 n'utilisant pas la lettre A.

Il fallait évidemment faire une figure pour bien comprendre.

1°) 1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad d_{n+1} = \frac{1}{2} d_n$.

On en déduit que (d_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $d_0 = \frac{1}{2} a$.

2°)

Il semble que certains élèves n'aient pas vu qu'il y avait le symbole S qui désigne une somme. On rappelle que $\sum_{k=0}^{k=n} d_k = d_0 + d_1 + \ldots + d_n$.

$$\sum_{k=0}^{k=n} d_k = d_0 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$$ (formule de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique)

$$= \frac{a}{\cancel{2}} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{\cancel{2}}}$$ (attention : les parenthèses autour de $\frac{1}{2}$ sont indispensables)

$$= a\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

III.

1°) L'algorithme qui convient est l'algorithme 3.

L'algorithme 1 affiche seulement la valeur de u_n pour le n particulier demandé, or on veut afficher toute les valeurs de la suite (u_n) jusqu'au n choisi.

C'est donc l'algorithme 3 qu'il faut utiliser puisqu'il affiche toutes les valeurs prises par la suite de u_0 à u_{n-1} (pour la boucle de 1 à n) ainsi que la valeur de u_n.

2°)

a)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_{n+1}}$$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{u_n}{u_n + 2}}$$

$$= 1 + \frac{u_n + 2}{u_n}$$

$$= \frac{2u_n + 2}{u_n}$$

$$= 2\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

$$= 2v_n$$

La suite (v_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = 1 + \frac{1}{u_0} = 2$.

b)

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = v_0 \times 2^n$$
$$= 2 \times 2^n$$
$$= 2^{n+1}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \;\; 1 + \frac{1}{u_n} = 2^{n+1}$ soit, après réduction : $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n = \frac{1}{2^{n+1} - 1}$.

IV.

1°) X : variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur

a) X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{4}$.

b)

$$P(\text{"le joueur gagne au moins une partie"}) = P(\mathrm{X} \geqslant 1)$$
$$= 1 - P(\mathrm{X} = 0)$$
$$= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$
$$= 0,94368648529053 \quad \text{(il s'agit d'un nombre décimal)}$$
$$\approx 0,944 \quad \text{(valeur arrondie au millième)}$$

c) Quelle est la probabilité que le joueur gagne au plus 5 parties ? Le résultat sera arrondi au millième.

$$P(\text{"le joueur gagne au plus 5 parties"}) = P(\mathrm{X} \leqslant 5)$$
$$P(\text{"le joueur gagne au plus 5 parties"}) = 0,98027229310903 \quad \text{(il s'agit d'un nombre décimal)}$$
$$P(\text{"le joueur gagne au plus 5 parties"}) \approx 0,980 \quad \text{(valeur arrondie au millième)}$$

d) $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = np = 10 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$

2°)
a)

$$\mathrm{Y} = 8\mathrm{X} - 2(10 - \mathrm{X}) - 30$$
$$= 10\mathrm{X} - 50$$

Attention, contrairement à ce que certains élèves ont écrit, Y ne suit pas la loi binomiale.
On ne peut donc pas utiliser les formules valables pour les variables aléatoires qui suivent la loi binomiale.

b)

$$\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = \mathrm{E}(10\mathrm{X} - 50)$$
$$= 10\mathrm{E}(\mathrm{X}) - 50$$
$$= 10 \times \frac{5}{2} - 50$$
$$= -25$$

c)

$$\mathrm{Y} > 10 \Leftrightarrow 10\mathrm{X} > 60$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{X} > 6$$

$$P(\text{"le joueur gagne plus de 10 euros"}) = P(\mathrm{Y} > 10)$$
$$= P(\mathrm{X} > 6)$$
$$= 1 - P(\mathrm{X} \leqslant 6)$$
$$= 0,00350570678711$$
$$\approx 0,004 \quad \text{(valeur arrondie au millième)}$$

V.

Cet exercice faisait intervenir les différentes expressions du produit scalaire.

1°)

a) Par projection orthogonale sur (PB), on obtient : $\overrightarrow{\mathrm{DM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}} = x(1-x)$.

On évite de « créer » un point pour résoudre cette question.

b) Par projection orthogonale sur (BQ), on obtient : $\overrightarrow{\mathrm{DM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BQ}} = \overrightarrow{\mathrm{CQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BQ}} = -x(1-x)$.

c)

$$\overrightarrow{\mathrm{DM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{DM}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{PB}} + \overrightarrow{\mathrm{BQ}}\right)$$
$$= \overrightarrow{\mathrm{DM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}} + \overrightarrow{\mathrm{DM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BQ}}$$
$$= x(1-x) - x(1-x)$$
$$= 0$$

On en déduit que (DM) est perpendiculaire à (PQ).

Certains élèves ont utilisé un raisonnement par équivalence.

2°)

La seule méthode pour résoudre cette question consiste à utiliser une décomposition.

On ne peut pas utiliser de méthode par projeté orthogonal.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{DQ} &= \left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CQ}\right)\\ &= \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CQ}\\ &= 0+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DC}+0\\ &= 0+1\times(1-x)+x\times 1\\ &= x+1-x\\ &= 1\end{aligned}$$

3°) M étant le milieu de [AC], P et Q sont les milieux respectifs de [AB] et [CB] et on a $\text{DP}=\text{DQ}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (on utilise le théorème de Pythagore).

D'après la définition du produit scalaire de deux vecteurs non nul, on a $\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{DQ}=\text{DP}\times\text{DQ}\times\cos\theta$.
Or d'après la question 2°), $\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{DQ}=1$.

Par conséquent, on a : $\dfrac{5}{4}\cos\theta=1$.

On en déduit que $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$.

4°) a)

1[ère] méthode :

En appliquant la formule de la médiane, I étant le milieu de [PQ], on a : $\text{DP}^2+\text{DQ}^2=2\text{DI}^2+\dfrac{\text{PQ}^2}{2}$.

On obtient : $1+x^2+1+(1-x)^2=2\text{DI}^2+\dfrac{1}{2}\left[x^2+(1-x)^2\right]$.

Après calculs, on obtient : $\text{DI}^2=\dfrac{2x^2-2x+5}{4}$.

2[e] méthode :

Cette méthode, plus courte, a été employée par quelques élèves.

D'après une formule du cours, on a : $\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{DQ}=\text{DI}^2-\dfrac{\text{PQ}^2}{4}$.

Donc $\text{DI}^2-\dfrac{\text{PQ}^2}{4}=1$ d'où $\text{DI}^2=1+\dfrac{\text{PQ}^2}{4}$

On obtient $\text{DI}^2=1+\dfrac{x^2+(1-x)^2}{4}$.

On retrouve l'expression $\text{DI}^2=\dfrac{2x^2-2x+5}{4}$ obtenue avec la 1[ère] méthode.

b)

On cherche x tel que $\text{DI}=\sqrt{2}\text{DQ}\quad(1)$.

$(1)\Leftrightarrow \text{DI}^2=2\text{DQ}^2$ car DI et DQ, étant des longueurs, sont deux nombres positifs

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2-2x+5}{4}=2\left(2x^2-2x+1\right)$$
$$\Leftrightarrow 14x^2-14x+3=0$$

La résolution de cette équation du second degré mène à $x=\dfrac{7+\sqrt{7}}{14}$ ou $x=\dfrac{7-\sqrt{7}}{14}$ (on utilise le discriminant réduit).
Ces deux solutions conviennent car les deux nombres sont bien tous les deux dans l'intervalle $[0\,;1]$.

VI.

1°) a) $\mathcal{C}_1$ b) $\mathcal{C}_3$ c) $\mathcal{C}_2$

On note Γ le cercle d'équation $x^2+y^2-2x+2y=0$.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;y)$.

$$\begin{aligned}M\in\Gamma &\Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y+1)^2-1=0\\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=2\end{aligned}$$

Γ est donc le cercle de centre $\Omega(1\,;-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$. On en déduit que Γ est confondu avec le cercle $\mathcal{C}_3$.

2°)

D a pour équation réduite $y=\dfrac{1}{2}x+2$.
Par construction, on conjecture que D est tangente au cercle $\mathcal{C}_2$ au point $\text{A}(0\,;2)$.

On peut aussi utiliser la calculatrice pour tracer les cercles et la droite.

Sur la calculatrice TI 83 : Graph $\boxed{\text{2nde}}$ Draw
On prend la fenêtre graphique définie par les inégalités $-5\leqslant x\leqslant 5$ et $-3\leqslant y\leqslant 3$.
Circle(0 ; 0 ; 2)
Circle (1 ; 0 ; $\sqrt{5}$)
Circle $(1;-1;\sqrt{2})$

Dans $\text{Y}_1=$, on trace la droite D d'équation $y=\dfrac{x}{2}+2$.
On observe que la droite D semble tangente au cercle $\mathcal{C}_2$.

1ère méthode :

Soit A le point de coordonnées $\left(0\,;2\right)$.

→ On vérifie tout d'abord que A est un point de $\mathcal{C}_2$.

$$\begin{aligned}{x_A}^2+{y_A}^2-2x_A-4&=0^2+2^2-0-4\\&=4-4\\&=0\end{aligned}$$

Donc $A\in\mathcal{C}_2$.

→ On vérifie ensuite que A est un point de *D*.

$x_A-2y_A+4=0-2\times2+4=0$ donc $A\in D$

→ On démontre enfin que $D\perp\left(\Omega A\right)$.

Un vecteur directeur de *D* est $\vec{u}\left(2\,;1\right)$.

$\overrightarrow{\Omega A}\left(-1\,;2\right)$

On a : $\vec{u}\bullet\overrightarrow{\Omega A}=2\times\left(-1\right)+2\times1=0$.

On en déduit que $D\perp\left(\Omega A\right)$.

Finalement, on en déduit que *D* est tangente à $\mathcal{C}_2$ au point A.

2e méthode :

Les abscisses des points d'intersection de *D* et de $\mathcal{C}_2$ sont les solutions de l'équation

$x^2+\left(\dfrac{1}{2}x+2\right)^2-2x-4=0\quad(1).$

On dit que (1) est l'équation aux abscisses des points d'intersection de *D* et de $\mathcal{C}_2$.

$$\begin{aligned}(1)&\Leftrightarrow x^2+\frac{x^2}{4}\cancel{+2x}\cancel{+4}\cancel{-2x}\cancel{-4}=0\\&\Leftrightarrow\frac{5x^2}{4}=0\\&\Leftrightarrow x=0\end{aligned}$$

L'équation (1) n'admet qu'une seule solution donc l'intersection de *D* et de $\mathcal{C}_2$ est constitué d'un seul point (à savoir le point $A\left(0\,;2\right)$).

VII.

1°)

● Déterminons une équation cartésienne du cercle Γ.

Γ a pour centre G et passe par O donc son rayon est $OE=2$.

Une équation de Γ s'écrit $\left(x-2\right)^2+y^2=4$.
Une équation cartésienne de Γ est donc $x^2+y^2-4x=0$.

● Déterminons une équation cartésienne de la droite Δ.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $\left(x\,;y\right)$.

$$\begin{aligned}M\in\Delta&\Leftrightarrow\overrightarrow{OF}\bullet\overrightarrow{OM}=0\\&\Leftrightarrow1\times x+y\times\sqrt{3}=0\\&\Leftrightarrow x+y\sqrt{3}=0\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de Δ est $x+y\sqrt{3}=0$.

2°) ${x_F}^2+{y_F}^2-4x_F=1+\left(\sqrt{3}\right)^2-4=0$ donc $F\in\Gamma$.

3°)

Δ a pour équation $y=-\dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

Les abscisses des points de Δ et Γ sont les solutions de l'équation $x^2+\left(-\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)^2-4x=0\quad(1).$

On dit que (1) est l'équation aux abscisses des points d'intersection de Δ et Γ.

$$\begin{aligned}(1)&\Leftrightarrow x^2+\frac{x^2}{3}-4x=0\\&\Leftrightarrow\frac{4x^2}{3}-4x=0\\&\Leftrightarrow4x\left(\frac{x}{3}-1\right)=0\\&\Leftrightarrow x=0\text{ ou }x=3\end{aligned}$$

Les points de Δ et Γ sont $O\left(0\,;0\right)$ et $G\left(3\,;-\sqrt{3}\right)$ (on calcule l'ordonnée du point G grâce à l'équation réduite de la droite D : $y_G=-\dfrac{3}{\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$).

4°) Le triangle FOG est inscrit dans le cercle Γ (les points O, F, G appartiennent à Γ).
De plus il est rectangle en O.
On en déduit que [FG] est un diamètre de Γ (car si un triangle est rectangle, alors son cercle a pour diamètre l'hypoténuse.

Ainsi E est le milieu de [FG].

$$\begin{cases} x_{\mathrm{E}} = \dfrac{x_{\mathrm{F}} + x_{\mathrm{G}}}{2} \\ y_{\mathrm{E}} = \dfrac{y_{\mathrm{F}} + y_{\mathrm{G}}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = \dfrac{1 + x_{\mathrm{G}}}{2} \\ 0 = \dfrac{\sqrt{3} + y_{\mathrm{G}}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{\mathrm{G}} = 3 \\ y_{\mathrm{G}} = -\sqrt{3} \end{cases}$$

On retrouve que G a pour coordonnées $\left(3\,;-\sqrt{3}\right)$.