Devoir commun de Mathématiques du deuxième trimestre ;2013 - 2014
Premières S1 et S2
Durée 2 heures. Calculatrice autorisée.

- *Toute réponse doit être justifiée.*
- *La rédaction et la présentation du devoir seront prises en compte.*
- ***Le sujet complet doit être rendu avec la copie.***

EXERCICE 1 : Probabilités (points).

Partie A : **Propriété de l'espérance. Démonstration de cours.**

1. Soit X une variable aléatoire dont la loi est décrite par le tableau suivant :

Valeurs possibles de X, x_i	x_1	…	…	x_n
$p_i = P(X = x_i)$	p_1	…	...	p_n

a) Donner l'expression de son espérance mathématique E(X) .

b) Montrer, en détaillant les calculs, que, quelque soient *a* et *b*, réels donnés : $E(aX+b)=aE(X)+b$.

2. Application

Le nombre de repas servis par une cantine scolaire un jour donné est une variable aléatoire X d'espérance mathématique 500.

La cantine dépense 2 euros par repas servi plus les coûts fixes journaliers qui s'élèvent à 1000 euros.

Soit Y la variable aléatoire égale à la dépense totale journalière pour la cantine, exprimée en euros.

Donner l'expression de Y en fonction de X et calculer E(Y) en utilisant la formule démontrée dans la question 1.b.

Partie B : Un jeu

Un club sportif organise un jeu pour financer ses activités.

Pour participer, un joueur doit acheter un billet d'entrée coûtant 1,70 euros puis prélever au hasard une boule dans un sac.

Ce sac contient des boules indiscernables au toucher : une boule rouge, trois boules jaunes et ***n*** boules noires (avec ***n*** entier strictement positif).

Si la boule prélevée est rouge le joueur reçoit 5 euros, si la boule est jaune il reçoit 2 euros et si la boule est noire, il reçoit 1 euro.

On note X_n la variable aléatoire qui, à chaque boule prélevée dans le sac, associe le gain algébrique du joueur(ne pas oublier la mise)

1. Déterminer la loi de probabilité de X_n .

2. Calculer l'espérance mathématique de X_n en fonction de n .

3. a. Supposons que ***n*** soit tel que $E(X_n)=0{,}5$. Est-ce intéressant pour le club organisateur ? Justifier

   b.Supposons que ***n*** soit tel que $E(X_n)=0$. Est-ce intéressant pour le club organisateur ? Justifier

   c. Supposons que ***n*** soit tel que $E(X_n)=-0{,}5$. Est-ce intéressant pour le club organisateur ? Justifier

4. Le club souhaite gagner au moins 0,50 euros par partie. Quel doit être le nombre minimal de boules noires contenues dans le sac pour que cette condition soit remplie ?

EXERCICE 2 : Trigonométrie : les parties A,B,Cet D sont indépendantes (points).

Partie A

Préciser pour chaque affirmation si elle est **vraie ou fausse**. On justifiera soigneusement :

1. On considère un angle α qui mesure 144°, alors une mesure en radians de α est $\frac{4\pi}{3}$ rad.
2. Soit l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ dont une mesure est $\frac{49\pi}{4}$ rad . La mesure principale de cet angle est $\frac{\pi}{4}$ rad.
3. A, B, M et N sont 4 points distincts du plan.
   Si $(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{AB}) = 3\pi$ rad alors les 4 points A, B, M et N sont alignés.

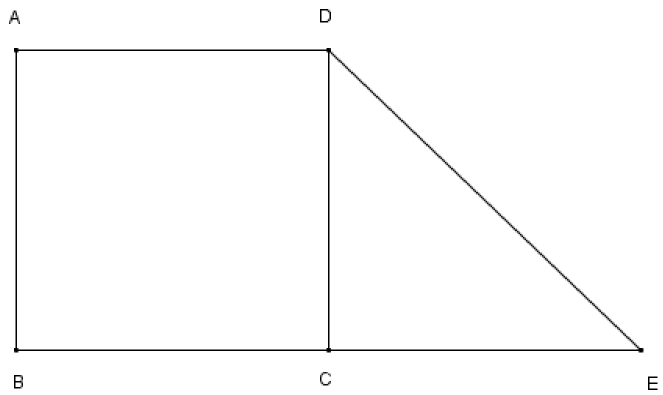
Partie B

On considère la figure ci-contre : ABCD est un carré et DCE est un triangle rectangle isocèle en C avec $(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CD}) = +\frac{\pi}{2}$

Déterminer les mesures des angles orientés suivants : Expliquer si nécessaire.

$(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DE})$; $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{CA})$; $(\overrightarrow{CE}; \overrightarrow{DC})$

$(\overrightarrow{CE}; \overrightarrow{DA})$;



Partie C

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(3x) = \frac{-1}{2}$
2. Lister les solutions de cette équation appartenant à l'intervalle $]-\pi; \pi]$

Partie D

On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

1. En déduire alors la valeur exacte de $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$
2. Déterminer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

EXERCICE 3 : . Fonctions, dérivation et tangentes. (points)

On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{-6|x|+3}{|x|+2}$.

On donne en feuille annexe sa courbe représentative C_f dans un repère du plan.

PARTIE A

1. Justifier que la fonction f est définie pour tout réel $x \in \mathbb{R}$
2. Montrer que pour tout $x \in [0;+\infty[$, $f(x)=-6+\frac{15}{x+2}$
3. a. En utilisant l'expression de la question précédente, montrer que f est une fonction strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

   b. En déduire que pour tout x appartenant à $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{3}{2}$
4. Montrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f(-x)=f(x)$

PARTIE B

1. En utilisant un taux d'accroissement ou une formule de dérivation, montrer que le nombre dérivé de f en 3 est égal à $\frac{-3}{5}$.
2. Donner une équation de la tangente (T) à C_f au point d'abscisse 3 et tracer (T) sur la figure 1.
3. Déterminer graphiquement $f'(-3)$

Feuille Annexe pour l'exercice 3

Nom et prénom : …..Classe …...........................

Figure 1