**Lycée Prévert. Devoir commun de Mathématiques du troisième trimestre. Premières S. 28/05/14**
**Corrigé**

## EXERCICE 1 : Fonctions. Recherche d'un maximum. (8 points).

### Partie A : Restitution organisée de connaissances.

*On rappelle la proposition suivante :*

*Proposition 1 : « Si $u$ et $v$ sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors la fonction $u\times v$ est dérivable sur I »*

1. Donnez la formule de dérivation d'un produit en recopiant et complétant
$(u(x)\times v(x))'=(u(x))'\ v(x)\ +\ u(x)\ (v(x))'$ **0,25**

2. Soit la fonction $f$ définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x\sqrt{x}$.

a. En utilisant la proposition 1 et la question 1, montrez que $f$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculez $f'(x)$ en détaillant tous vos calculs. **1**

**la fonction $u$ définie par $u(x)=x$ est définie et dérivable sur ℝ donc aussi sur $]0;+\infty[$**
**la fonction $v$ définie par $v(x)=\sqrt{x}$ est définie sur $[0;+\infty[$ mais dérivable seulement sur $]0;+\infty[$ donc d'après la proposition 1, la fonction $f$ est dérivable au moins sur I = $]0;+\infty[$**
**Nous calculons $f'(x)$ sur I, en utilisant la formule de dérivation d'un produit.**

$u(x)=x$ ; $u'(x)=1$ , $v(x)=\sqrt{x}$ ; $v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ **donc** $f'(x)=1\times\sqrt{x}+x\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

**On réduit au même dénominateur :** $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}\times2\sqrt{x}+x}{2\sqrt{x}}=\dfrac{3x}{2\sqrt{x}}$

b. Étudiez la dérivabilité à droite en zéro de la fonction $f$. **1**

*Aide : On rappelle la condition de dérivabilité en zéro :*

*« Si la limite du taux d'accroissement $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$, quand $h$ tend vers zéro( $h>0$ ), existe, alors la fonction $f$ est dérivable en zéro (à droite) et $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)$ »*

**On calcule le taux d'accroissement** $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\dfrac{h\sqrt{h}-0\sqrt{0}}{h}=\dfrac{h\sqrt{h}}{h}=\sqrt{h}$,

**puis la limite de ce taux lorsque $h$ tend vers zéro, en restant positif :** $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\sqrt{h}=0$.

**La fonction $f$ est donc dérivable en zéro (à droite) et $f'(0)=0$.**
**On peut en conclure que la fonction $f$ est dérivable sur $[0;+\infty[$**

3. Énoncez la proposition réciproque de la proposition 1 et prouvez que cette réciproque est fausse en fournissant un contre-exemple. **0,5**

*Proposition 1 : « Si $u$ et $v$ sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors la fonction $u\times v$ est dérivable sur I »*

**La réciproque est *« Si la fonction $u\times v$ est dérivable sur un intervalle I alors $u$ et $v$ sont deux fonctions dérivables sur I »***
**Cette réciproque est FAUSSE comme le montrent les questions précédentes : la fonction produit $f=u\times v$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ alors que l'une des fonctions $v$ n'est pas dérivable sur $[0;+\infty[$.**

### Partie B : Étude d'une fonction.

Soit $g$ la fonction définie sur ]0 ; 6[ par $g(x)=(6-x)\sqrt{(x)}$ et $C_g$ sa représentation graphique dans un repère du plan.

1. Montrez en détaillant les calculs que $g'(x)=\dfrac{-3x+6}{2\sqrt{x}}$ **1**

**La fonction $g$ est un produit de deux fonctions dérivables sur ]0 ; 6[. On applique la formule de dérivation d'un produit.**

$u(x)=6-x$ ; $u'(x)=-1$ ; $v(x)=\sqrt{x}$ ; $v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ **; donc** $g'(x)=-1\times\sqrt{x}+(6-x)\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

**On réduit au même dénominateur pour obtenir la forme voulue :** $g'(x)=\dfrac{-\sqrt{x}\times2\sqrt{x}+(6-x)}{2\sqrt{x}}=\dfrac{-3x+6}{2\sqrt{x}}$

2. En déduire les variations de la fonction $g$ et son maximum sur ]0 ; 6[. **1,5**

**Pour étudier les variations de la fonction $g$, on étudie au préalable le signe de sa dérivée $g'$ sur ]0 ; 6[.**
**Le dénominateur de $g'(x)$ est strictement positif sur ]0 ; 6[ donc $g'(x)$ est du signe de son numérateur**
$-3x+6\geqslant0$ **équivaut à** $-3x\geqslant-6$ **équivaut à** $x\leqslant2$. **On peut donc dresser le tableau suivant :**

| $x$ | 0 | | 2 | | 6 | **Justifications** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $g'(x)$ | | + | 0 | − | | **On peut aussi invoquer le signe d'une fonction affine $ax+b$ avec $a=-3$** |
| Variations de $g$ | 0 | ↗ | $4\sqrt{2}$ | ↘ | 0 | **Calcul du maximum** $g(2)=(6-2)\sqrt{2}=4\sqrt{2}$ |

**La fonction $g$ admet un maximum égal à $4\sqrt{2}$ atteint pour $x=2$**

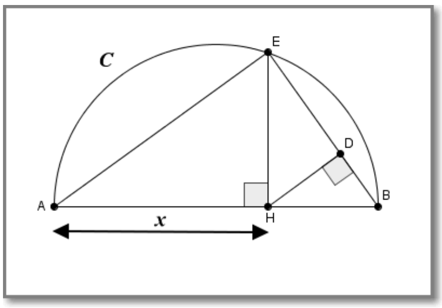
3. Déterminez une équation de la tangente à $C_g$ au point d'abscisse 1. **0,5**

**On utilise le cours : Une tangente à la courbe $C_g$ au point d'abscisse $a$ a pour équation :**
$y=g'(a)(x-a)+g(a)$ **donc au point d'abscisse 1 :** $y=g'(1)(x-1)+g(1)$

$g'(1)=\dfrac{-3+6}{2\sqrt{1}}=\dfrac{3}{2}$ **et g(1 ) = 5 donc une équation de la tangente à $C_g$ au point d'abscisse 1 est :**

$y=\dfrac{3}{2}(x-1)+5$. **Après développement on obtient** $y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{7}{2}$

**Partie C : Application à un problème de géométrie.**




On considère le demi-cercle $(C)$ de diamètre [AB], tel que AB = 6 .

H est un point du segment [AB] distinct de A et de B. On note $x$ la longueur AH. La perpendiculaire en H à (AB) coupe $(C)$ en E.

D est le pied de la hauteur issue de H dans le triangle EHB.

*L'objectif de cette partie est de déterminer la position de H sur le segment [AB] pour laquelle la longueur HD est maximale.*

On note $HD=h(x)$

1. Quelle est la nature du triangle AEB ? **0,25**

**Le triangle AEB est un triangle rectangle en E car ses trois sommets sont situés sur un même cercle $(C)$ et un de ses côtés, [AB], est un diamètre de ce cercle.**

2. Prouvez que $AE=\sqrt{6x}$ en exprimant $\cos(\widehat{BAE})$ dans deux triangles rectangles différents. **0,75**

**On va utiliser les deux triangles rectangles AEB et AHE.**

**Dans le triangle rectangle AEB :** $\cos(\widehat{BAE})=\frac{AE}{AB}=\frac{AE}{6}$

**Dans le triangle rectangle AHE :** $\cos(\widehat{BAE})=\frac{AH}{AE}=\frac{x}{AE}$

**Donc** $\frac{AE}{6}=\frac{x}{AE}$ **, ce qui entraine** $AE^2=6x$ **, puis** $AE=\sqrt{6x}$ **puisque AE est une grandeur positive .**

3. Prouvez que $h(x)=\frac{\sqrt{6}}{6}(6-x)\sqrt{x}$ en utilisant $\sin(\widehat{ABE})$ dans deux triangles rectangles différents.**0,75**

**On procède de même dans les triangles rectangles AEB et HDB.**

**Dans le triangle rectangle AEB :** $\sin(\widehat{ABE})=\frac{AE}{AB}=\frac{AE}{6}=\frac{\sqrt{6x}}{6}$

**Dans le triangle rectangle HDB :** $\sin(\widehat{ABE})=\frac{HD}{HB}=\frac{h(x)}{6-x}$

**Donc** $\frac{\sqrt{6x}}{6}=\frac{h(x)}{6-x}$**, ce qui entraine** $6h(x)=(6-x)\sqrt{6x}$**, puis** $h(x)=\frac{\sqrt{6}}{6}(6-x)\sqrt{x}$ **puisque** $\sqrt{6x}=\sqrt{6}\times\sqrt{x}$

4. A l'aide de la partie B répondre à l'objectif. **0,5**

**Nous remarquons que** $h(x)=\frac{\sqrt{6}}{6}g(x)$ **donc** $h'(x)=\frac{\sqrt{6}}{6}g'(x)$**. Les fonctions** $h$ **et** $g$ **ont donc les mêmes variations puisque leurs dérivées respectives ont le même signe.**

**La longueur HD est donc maximale lorsque** $x=2$**, cette longueur maximale est** $h(2)=\frac{\sqrt{6}}{6}\times 4\sqrt{2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

## EXERCICE 2 : Probabilités. Loi binomiale. (6 points).

Une entreprise fabrique des cartes à puce. Chaque puce peut présenter deux défauts a et b.

On prélève au hasard, une puce dans la production de la journée.

Une étude a permis de montrer que la probabilité qu'une puce prélevée au hasard ait le défaut a est 0,03 ; la probabilité qu'elle ait le défaut b est 0,02; la probabilité qu'elle ait les deux défauts est 0,0006.

Une puce est défectueuse dès qu'elle a au moins un défaut.

1. Montrez que la probabilité $p$ que la puce soit défectueuse est 0,0494 **1**

**On note A l'évènement la puce a le défaut a et B l'évènement la puce a le défaut b .**
**L'évènement « la puce est défectueuse » est l'évènement** $A\cup B$ **.**
**On utilise la propriété valable pour tous évènements :** $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$
**donc** $p=0{,}03+0{,}02-0{,}0006=0{,}0494$

2. Les puces sont conditionnées par lots de 100 pour un nettoyage avant montage sur la carte.

On prélève au hasard un lot de 100 puces (*on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise*).

X est la variable aléatoire, qui à chaque lot, associe le nombre de puces défectueuses.

a) Justifiez que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres. **1**

**Soit l'épreuve de Bernoulli : prélever au hasard une puce et observer si elle est défectueuse ou non.**
**Cette épreuve a deux issues** $S$ **et** $E=\overline{S}$**, le succès S étant « la puce est défectueuse »de probabilité** $p=0{,}0494$ **.**
**Cette épreuve est répétée 100 fois, selon un schéma de Bernoulli (prélèvement assimilé à un tirage avec remise donc conditions identiques et indépendantes pour chaque tirage).**
**X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès, elle suit donc la loi binomiale de paramètres** $n=100$ **et** $p=0{,}0494$

b) Calculez $p(X=5)$ en écrivant la formule utilisée, puis donnez une valeur approchée à $10^{-2}$ près de ce résultat et donnez-en la signification. **0,5**

**On utilise la formule du cours** $p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ **avec** $k=5$, $n=100$ **et** $p=0{,}0494$

$p(X=5)=\binom{100}{5}0{,}0494^5(0{,}9506)^{95}\approx 0{,}18$.

**La probabilité d'obtenir exactement 5 puces défectueuses dans un lot de 100 est environ 0,18**

c) Calculer la probabilité que dans ce lot, il y ait au moins une puce défectueuse. Arrondir à $10^{-2}$ près. **1**

**On doit calculer** $p(X\geqslant 1)=p(X=1)+p(X=2)+\ldots+p(X=100)$. **Ce calcul étant long on fait appel à l'évènement contraire :** $p(X\geqslant 1)=1-p(X=0)$

$p(X=0)=\binom{100}{0}0{,}0494^0(0{,}9506)^{100}=0{,}9506^{100}$ **donc** $p(X\geqslant 1)=1-0{,}956^{100}\approx 0{,}99$

**La probabilité que dans ce lot, il y ait au moins une puce défectueuse est environ 0,99**

d) Quel est en moyenne le nombre de puces défectueuses dans un lot de 100 ? **0,5**

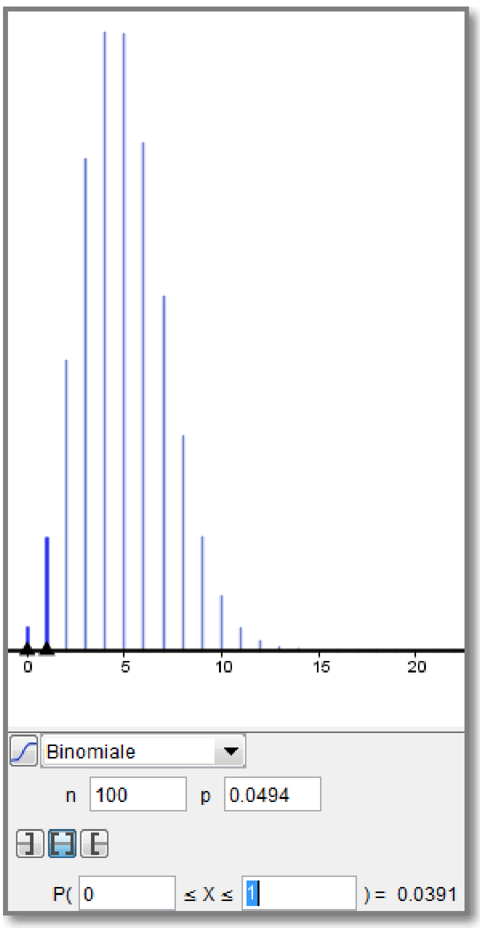
**On calcule l'espérance de la variable aléatoire X :** $E(x)=np=100\times 0{,}0494=4{,}94$.
**On peut estimer qu'il y a environ 5 puces défectueuses par lot de 100, en moyenne, sur un grand nombre de lots vérifiés.**

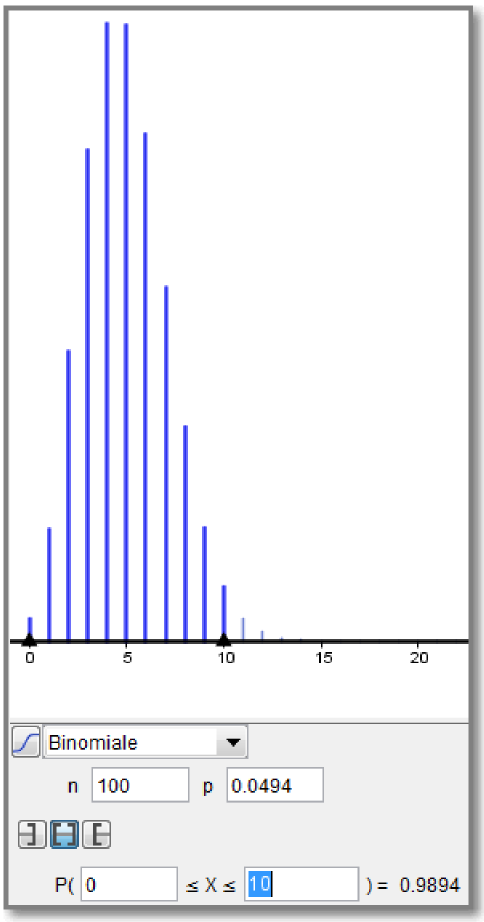
3. Un monteur comptabilise 9 puces défectueuses dans un des lots. Quelle décision va-t-il prendre ? **2**

**Le monteur a fait des mathématiques dans sa jeunesse, il connait donc les intervalles de fluctuation !**
**Il sait que la proportion de puces défectueuses fluctue d'un lot à l'autre.**
**Il calcule l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % :**
**Il détermine à l'aide de la calculatrice le nombre** $a$ **tel que** $p(X\leqslant a)>0{,}025$ **et le nombre** $b$ **tel que** $p(X\leqslant b)\geqslant 0{,}975$. **Il obtient a= 1 et b =10 . (On peut vérifier et visualiser ceci avec GeoGebra comme ci-dessous)**

**Donc l'intervalle de fluctuation est** $I=\left[\frac{1}{100};\frac{10}{100}\right]=[0{,}01;0{,}1]$

**Dans son lot la fréquence de puces défectueuses est** $f=\frac{9}{100}=0{,}09$. **Ce nombre appartient à I. Il va donc considérer que son lot est conforme, au seuil de 95 %.**

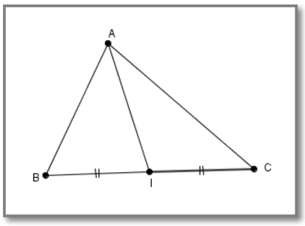


## EXERCICE 3 : Applications du produit scalaire. (6 points)

*Les deux parties sont indépendantes*

**Partie A :**




1. Démontrer, en utilisant le produit scalaire, le théorème de la médiane suivant :

$$AB^2+AC^2=2\,AI^2+\frac{BC^2}{2}$$ **1,5**

**Soit I le milieu du segment [BC].**

**Utilisons la relation de Chasles et le produit scalaire :**

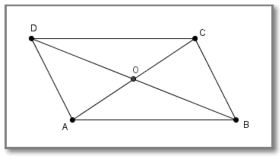
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}$ **et** $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}$ = $\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{IB}$ **car I étant le milieu de [BC],** $\overrightarrow{IC}=-\overrightarrow{IB}$.

**Donc,** $AB^2=\overrightarrow{AB}^2=(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB})^2=AI^2+IB^2+2\,\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IB}$ **et** $AC^2=\overrightarrow{AC}^2=(\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{IB})^2=AI^2+IB^2-2\,\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IB}$ .

**En additionnant membre à membre on obtient :**

$$AB^2+AC^2=2\,AI^2+2\,IB^2=2\,AI^2+2\left(\frac{BC}{2}\right)^2$$ **puisque I étant le milieu de [BC],** $IB=\frac{BC}{2}$.

**Donc** $AB^2+AC^2=2\,AI^2+2\,\frac{BC^2}{4}=2\,AI^2+\frac{BC^2}{2}$




2. ABCD est un parallélogramme de centre O. AB =15 ; BC = 13 et AC = 14 (voir ci-contre )

Démontrez que $DB=4\sqrt{37}$ **1,5**

**Nous utilisons les propriétés d'un parallélogramme et le théorème de la médiane :**

**Les côtés opposés d'un parallélogramme ont même longueur donc** $AD=BC=13$.

**Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu, O est donc le milieu de [DB]et de [AC].**

**donc** $AO=\frac{AC}{2}=7$

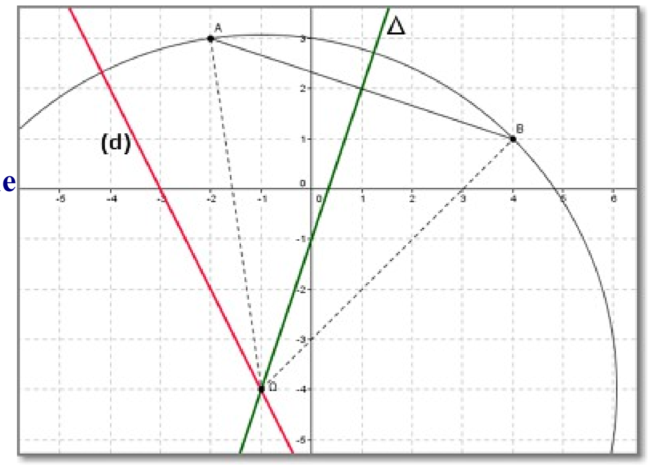
**On applique le théorème de la médiane dans le triangle ADB :**

$AB^2+AD^2=2\,AO^2+\frac{DB^2}{2}$ **donc** $DB^2=2(AB^2+AD^2-2\,AO^2)$ **avec AB = 15 , AD = BC = 13 et AO =7 donc**

$DB^2=2(15^2+13^2-2\times7^2)=592$ **donc** $DB=\sqrt{592}=4\sqrt{37}$

**Partie B** : **A vous de prendre toutes les initiatives !** **3**

Dans un repère orthonormé, la droite $(d)$ a pour équation $2x+y+6=0$. Trouvez une équation du cercle dont le centre est situé sur la droite $(d)$ et qui passe par les points $A(-2;3)$ et $B(4;1)$.




**Plusieurs méthodes sont possibles, en voici une :**

**Le centre d'un cercle passant par A et B est situé à égale distance de A et B, il est donc situé sur la médiatrice de [AB]. On peut donc construire aisément ce centre comme intersection de la droite (d) et de cette médiatrice Δ.**

**On détermine par calcul une équation de Δ sachant qu'elle a pour vecteur normal le vecteur** $\overrightarrow{AB}$ **et qu'elle passe par le milieu I de [AB].**

**Après calculs,** $\overrightarrow{AB}(6;-2)$ **et** $I(1;2)$.

**Donc une équation cartésienne de la médiatrice Δ est :**

$6x-2y+c=0$ **. Les coordonnées du point I vérifient cette équation donc** $6\times1-2\times2+c=0$ **donc** $c=-2$.

**Une équation cartésienne de la médiatrice Δ est :**

$6x-2y-2=0$ **, son équation réduite est** $y=3x-1$.

**L'équation réduite de la droite** $(d)$ **est** $y=-2x-6$

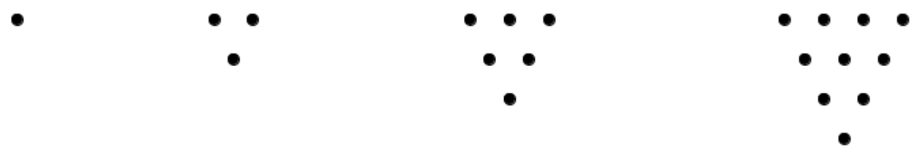
**Les coordonnées $(x;y)$ du centre Ω sont donc solutions du système $\begin{cases} y=3x-1 \\ y=-2x-6 \end{cases}$.**

**On obtient aisément $\Omega(-1;-4)$. On calcule ensuite le rayon du cercle en calculant $\Omega A$ ou $\Omega B$**
**$\overrightarrow{\Omega A}(-1;7)$ donc $\Omega A=\sqrt{(-1)^2+7^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$**
**L'équation cartésienne canonique du cercle de centre Ω passant par A et B est donc**
**$(x+1)^2+(y+4)^2=50$**

**Bonus !!!! Algorithmes, nombres triangulaires. (2 points)**

Voici les quatre premiers nombres triangulaires et leur représentation à l'aide de points :

$T_1=1$ $T_2=3$ $T_3=6$ $T_4=10$



1. Combien vaut $T_5$, combien vaut $T_6$ ? **0,5**

**$T_1=1$**
**$T_2=1+2=T_1+2=3$**
**$T_3=1+2+3=T_2+3=6$**
**$T_4=1+2+3+4=T_3+4=10$**
**ainsi $T_5=T_4+5=10+5=15$ et $T_6=T_5+6=15+6=21$**

On voudrait connaître $T_{100}$

2. Exprimer le nombre triangulaire $T_n$ connaissant le nombre triangulaire précédent. **1**

**$T_n=T_{n-1}+n$ (pour $n\geqslant 2$)**

3. Écrire un algorithme permettant de calculer $T_n$ lorsque l'entrée est $n$. **0,5**

**Plusieurs algorithmes donnent satisfaction ( boucle Pour ou boucle Tant que ).**
**En voici un :**

**Entrée : Saisir *n***
**Initialisation : S prend la valeur 0**
**Traitement : Pour I allant de 1 à *n* , Faire :**
**S prend la valeur S +I**
**Fin Pour**
**Sortie : Afficher S**

**On obtient ainsi $T_{100}=5050$**