1S Mercredi 6 Mai 2015 DS COMMUN 2h Calculatrice autorisée

Le barème est indicatif. **L'annexe p4** est à rendre avec la copie.
La présentation et la rédaction seront prises en compte dans la notation.

EXERCICE N° 1 : (5 POINTS)

Au libre-service d'un restaurant d'entreprise, un repas est composé obligatoirement d'une entrée, d'un plat et d'un dessert. Pour chaque repas, un employé choisit au hasard :

— une entrée parmi trois : Crudités (C), Salade (S) ou Quiche (Q).
— un plat parmi deux : Poisson (P) ou Viande (V).
— un dessert parmi deux : Glace (G) ou Fruits (F).

1. Sur **l'annexe (à rendre avec la copie)**, compléter l'arbre des repas.
2. En déduire le nombre de repas que peut composer un employé.
3. On appelle :

   A l'évènement : « le repas composé contient le plat de poisson »,

   B l'évènement : « le repas composé contient de la quiche en entrée ».

   On note $p(\mathrm{A})$ la probabilité de l'évènement A.
   Calculer $p(\mathrm{A})$, $p(\mathrm{B})$, $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ et en déduire $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$.

4. Le tableau suivant donne en kcal le bilan calorique des mets proposés :

<table>
<tr><td>Entrées</td><td>Crudités (C) : 300</td><td>Salade composée (S) : 300</td><td>Quiche (Q) : 400</td></tr>
<tr><td>Plats</td><td colspan="2">Viande (V) : 900</td><td>Poisson (P) : 600</td></tr>
<tr><td>Desserts</td><td>Glace (G) : 300</td><td colspan="2">Fruits (F) : 100</td></tr>
</table>

   Compléter, **sur l'annexe**, le bilan calorique de chaque repas.

5. On appelle R la variable aléatoire qui à chaque repas associe son bilan calorique.
   (a) Donner l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire R.
   (b) Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire R.
   (c) Déterminer le bilan calorique moyen d'un repas.

EXERCICE N° 2 : (VRAI-FAUX : 5 POINTS)

Pour chacune des sept propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse **en justifiant la réponse.**
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Proposition 1 :** Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x + 2}$. Alors $f'(x) = 2x - 2$.
2. **Proposition 2 :** L'équation $2\cos(x) + 1 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ des solutions de la forme $\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
3. Dans un repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$),
   on considère les points : $A(-1;5)$ $B(-3;8)$ $C(4;-2)$ $D(8;-8)$ $E(0;\dfrac{7}{2})$.
   (a) **Proposition 3 :** les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
   (b) **Proposition 4 :** le point E appartient à la droite (CD).
   (c) **Proposition 5 :** Une équation de la droite (AD) est : $9x - 13y + 74 = 0$.
4. **Proposition 6 :** Si A, B, C, D sont quatre points tels que $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{BC}$ alors le point B est le milieu de $[AD]$.
5. **Proposition 7 :** Pour tout réel x, $\sin(\dfrac{\pi}{2} - x) + \cos(\pi + x) + \sin(\dfrac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$.

EXERCICE N° 3 : (4 POINTS)

À l'automne 2014, Claude achète une maison à la campagne ; il dispose d'un terrain de 1 500 m^2 entièrement engazonné. Mais tous les ans, 20 % de la surface engazonnée est détruite et remplacée par de la mousse. Claude arrache alors, à chaque automne, la mousse sur une surface de 50m^2 et la remplace par du gazon.
Pour tout nombre entier naturel n, on note u_n la surface en m^2 de terrain engazonné au bout de n années, c'est-à-dire à l'automne $2014 + n$. On a donc $u_0 = 1\,500$.

1. Calculer u_1.
2. Justifier que, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 0,8u_n + 50$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout nombre entier naturel n par :
$$v_n = u_n - 250.$$
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
   (c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   (d) Quelle est la surface de terrain engazonné au bout de 4 années ?
4. Compléter l'algorithme fourni **en annexe** pour qu'il affiche le nombre d'années nécessaires pour que la surface engazonnée soit inférieure ou égale à 500 m^2.

EXERCICE N° 4 : (6 POINTS)

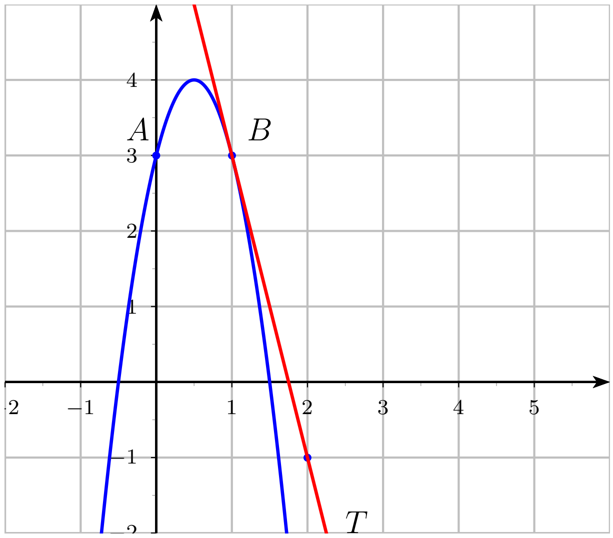
Partie A : Recherche d'une fonction

La parabole $\mathcal{P}$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction polynôme g définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$g(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c désignent trois nombres réels que l'on se propose de déterminer dans cette partie.

Les points $A(0\ ;\ 3)$ et $B(1\ ;\ 3)$ appartiennent à la parabole $\mathcal{P}$.
La droite (T) est la tangente à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse 1.



1. Calculer $g'(x)$ en fonction de a et de b.
2. Par lecture graphique, déterminer les valeurs de $g(0)$, $g(1)$ et $g'(1)$.
3. Justifier que $c = 3$ et que les questions 1. et 2. conduisent au système (S) :

$$\begin{cases} a + b & = & 0 \\ 2a + b & = & -4 \end{cases}$$

4. Résoudre le système (S). En déduire une écriture de la fonction g.

Partie B : Etude d'une fonction f

On suppose que $g(x) = -4x^2 + 4x + 3$.

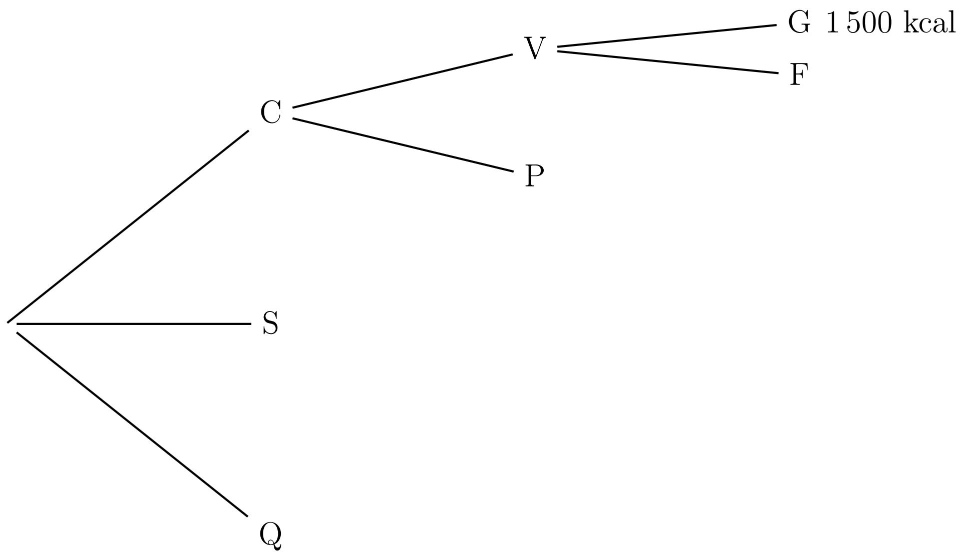
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^4 + \dfrac{8}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - 3x + 2$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Démontrer que pour tout nombre réel x, on a : $f'(x) = (x - 1) \times g(x)$.
3. Déterminer le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f.
   (On pourra donner une valeur approchée des extremums)
4. En déduire que pour tout nombre réel x :

$$-x^4 + \frac{8}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x - 1 \leqslant 0$$

ANNEXE (à rendre avec la copie)

Exercice 1 : arbre des repas



Exercice 3 : Algorithme

```
Initialisation
                u prend la valeur 1 500
                n prend la valeur 0
Traitement
                Tant que .........faire
                   u prend la valeur .........
                   n prend la valeur .........
                Fin Tant que
Sortie
                Afficher n
```