Corrigé du Contrôle n$^{\text{o}}$ 1

Exercice 1

1. Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$, c'est à dire $-x^2 + 4x - 3 = 0$.
   Il s'agit d'une équation du second degré dont le discriminant est $\Delta = 16 - 12 = 4 = 2^2$.
   Donc l'équation a deux solutions : $\dfrac{-4-2}{-2} = 3$ et $\dfrac{-4+2}{-2} = 1$.
   Donc $\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses en deux points : $A(1;0)$ et $B(3;0)$.
2. f est un polynôme du second degré qui a pour racines 1 et 3, dont le coefficient de x^2 est négatif, on en déduit son signe :

x		1		3	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

3. (a) Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et de (d) sont les solutions de l'équation $f(x) = 2x - 3$:
$f(x) = 2x - 3 \iff -x^2 + 4x - 3 = 2x - 3 \iff x^2 - 2x = 0 \iff x(x-2) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2$.
   Donc $\mathcal{P}$ et de (d) se coupent en deux points : $E(0;-3)$ et $F(2;1)$.

   (b) Pour tout réel x, $f(x) - (2x-3) = -x^2 + 4x - 3 - (2x-3) = -x^2 + 2x = x(-x+2)$.
   $f(x) - (2x-3)$ est un polynôme du second degré dont les racines sont 0 et 2 et dont le coefficient de x^2 est négatif, on en déduit son signe :

x		0		2	
$f(x) - (2x-3)$	$-$	0	$+$	0	$-$

   Donc :
   - Pour tout x de $]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$, on a :
     $f(x)-(2x-3) < 0$, donc $f(x) < 2x-3$, donc $\mathcal{P}$ est au dessous de (d) sur $]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$.
   - Pour tout x de $]0;2[$, on a :
     $f(x) - (2x-3) > 0$, donc $f(x) > 2x - 3$, donc $\mathcal{P}$ est au dessus de (d) sur $]0;2[$.
4. Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et de $(\mathcal{D}_p)$ sont les solutions de l'équation $f(x) = 2x + p$:
   $f(x) = 2x + p \iff -x^2 + 4x - 3 = 2x + p \iff x^2 - 2x + p + 3 = 0$.
   On obtient une équation du second degré dont le discriminant est :
   $\Delta = 4 - 4(p+3) = -4p - 8 = -4(p+2)$.
   - L'équation a deux solutions si et seulement si $-4p - 8 > 0$.
     $-4p - 8 > 0 \iff -4p > 8 \iff p < -2$.
   - L'équation a une solution si et seulement si $-4p - 8 = 0$, c'est à dire $p = -2$.
   - L'équation n'a pas de solution si et seulement si $-4p - 8 < 0$.
     $-4p - 8 < 0 \iff -4p < 8 \iff p > -2$.

   On en déduit que :
   - Pour tout réel p de $]-\infty;-2[$, $(\mathcal{D}_p)$ coupe $\mathcal{P}$ en deux points.
   - Pour $p = -2$, $(\mathcal{D}_p)$ coupe $\mathcal{P}$ en un point.
   - Pour tout réel p de $]-2;+\infty[$, $(\mathcal{D}_p)$ ne coupe pas $\mathcal{P}$.

Exercice 2

voir cours

Exercice 3

1. $M \in [AD]$ et $AD = 2$, d'où $x \in [0\,;2]$.
2. Les triangles AMI et MCD sont respectivement rectangles en A et D. D'après le théorème de Pythagore, on a : $MI^2 = AM^2 + AI^2 = x^2 + (\frac{1}{2})^2$ et $MC^2 = MD^2 + CD^2 = (2-x)^2 + 2^2$. Ainsi, pour tout $x \in [0\,;2]$: $f(x) = x^2 + (\frac{1}{2})^2 + (2-x)^2 + 2^2 = 2x^2 - 4x + \frac{21}{4}$.
3. On détermine la forme canonique de f : $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{4} = 1$ et $\beta = f(\alpha) = \frac{13}{4}$. Pour tout $x \in [0\,;2]$: $f(x) = 2(x-1)^2 + \frac{13}{4}$. On en déduit :

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{21}{4}$ $\searrow$	$\frac{13}{4}$	$\nearrow$ $\frac{21}{4}$

4. (a) D'après le théorème de Pythagore (et sa réciproque), le triangle IMC est rectangle en M si et seulement si : $MI^2 + MC^2 = CI^2 \iff f(x) = \frac{17}{4}$.

   (b) D'après la question précédente, cela revient à résoudre l'équation $f(x) = \frac{17}{4}$ sur $[0\,;2]$. $f(x) = \frac{17}{4} \iff 2x^2 - 4x + 1 = 0$. Le discriminant correspondant vaut 8. Les solutions de cette équation sont (après simplification) : $\frac{2-\sqrt{2}}{2} \approx 0,29$ et $\frac{2+\sqrt{2}}{2} \approx 1,71$. Ces deux valeurs sont bien dans $[0\,;2]$.

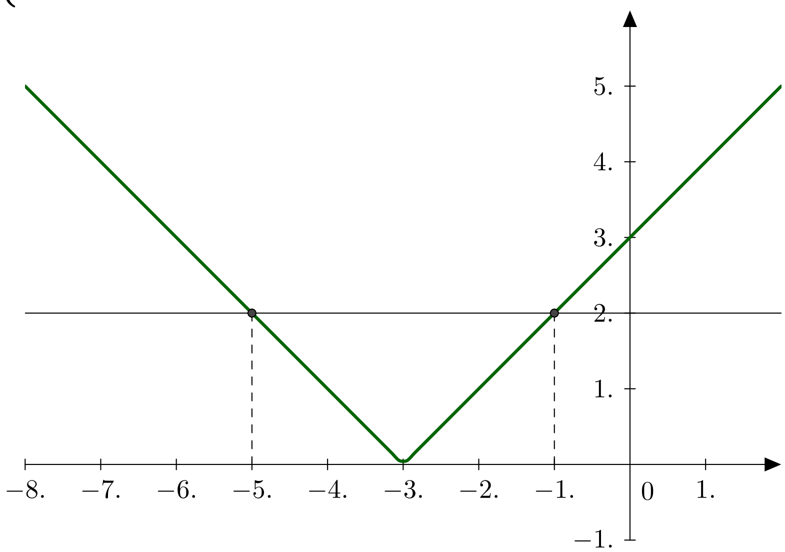
Exercice 4

1. $\pi - 3 > 0$, donc $|\pi - 3| = \pi - 3$. $\quad 1 - \sqrt{3} > 0$, donc $|1 - \sqrt{3}| = -(1 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$.
2. (a)
   - Si $x + 3 \geqslant 0$, c'est à dire $x \geqslant -3$, on a $f(x) = x + 3$
   - Si $x + 3 < 0$, c'est à dire $x < -3$, on a $f(x) = -(x+3) = -x - 3$

   On en déduit que :

   $$\begin{cases} \text{Pour tout } x \text{ de}]-\infty;-3[, f(x) = -x - 3 \\ \text{Pour tout } x \text{ de}]-3;+\infty[, f(x) = x + 3 \end{cases}$$

   f est affine par morceaux



3. Graphiquement, l'équation $|x + 3| = 2$ c'est à dire $f(x) = 2$, a deux solutions -5 et -1.

Exercice 5

Variable(s)
- m, p, x_1, x_2 : *nombres réels*

Début
- Saisir la valeur de m
- Saisir la valeur de p
- **Si** $m = 0$ **Alors**
  - **Si** $p = 0$ **Alors**
    - Afficher « tout nombre réel est solution »
  - **Sinon**
    - Afficher « cette équation n'a pas de solution réelle »
  - **FinSi**
- **Sinon**
  - **Si** $p = 0$ **Alors**
    - Afficher « 0 est l'unique solution »
  - **Sinon**
    - **Si** $\frac{p}{m} > 0$ **Alors**
      - Afficher « l'équation a deux solutions : $\sqrt{\frac{p}{m}}$ et $-\sqrt{\frac{p}{m}}$ »
    - **Sinon**
      - Afficher « cette équation n'a pas de solution réelle »
    - **FinSi**
  - **FinSi**
- **FinSi**

Fin

Question bonus 1

$$3x > \frac{1}{x+1} \iff 3x - \frac{1}{x+1} > 0 \iff \frac{3x(x+1)-1}{x+1} > 0 \iff \frac{3x^2+3x-1}{x+1} > 0$$

Le numérateur possède deux racines : $x_1 = \frac{-3-\sqrt{21}}{6} \approx -1,26$ et $x_2 = \frac{-3+\sqrt{21}}{6} \approx 0,26$. Le dénominateur s'annule en -1. On étudie le signe du quotient :

x	$-\infty$		x_1		-1		x_2		$+\infty$
$3x^2+3x-1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{3x^2+3x-1}{x+1}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Par lecture du tableau : $S = \left]\frac{-3-\sqrt{21}}{6}\,;-1\right[\cup \left]\frac{-3+\sqrt{21}}{6}\,;+\infty\right[$

Question bonus 2 : 0 n'est pas solution de l'équation $x^2 - 4x + 2 = 0$, donc Si x est un réel qui vérifie $x^2 - 4x + 2 = 0$, on sait que $x \neq 0$.

On peut donc diviser les deux membre de l'égalité par x, on obtient : $\dfrac{x^2-4x+2}{x} = 0$,

donc $\dfrac{x^2}{x} - \dfrac{4x}{x} + \dfrac{2}{x} = 0$, donc $x - 4 + \dfrac{2}{x} = 0$. On en déduit que $x + \dfrac{2}{x} = 4$.