Correction du devoir commun de mathématiques 2016

Exercice 1

Partie A. — Étude graphique

1. **a.** Graphiquement, l'image de 1 par f est 10 et l'image de 4 par f est 16.
   b. Graphiquement, l'unique antécédent de 8 par f est 2 et les antécédents de 13 par f sont environ 0,4 et 3,6.
2. **a.** Le tableau de variation de f sur $[0\,;4]$ est le suivant.

x	0	2	4
Variations de f	16 ↘	8	↗ 16

   b. Le minimum de f sur $[0\,;4]$ est 8 et il est atteint en $x = 2$.
3. **a.** Graphiquement, l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 10$ est $\{1, 3\}$.
   b. Graphiquement, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 10$ est $[1\,;3]$.

Partie B. — Étude d'un problème concret

1. Lorsque P décrit [AB], x décrit l'intervalle $[0\,;4]$ puisque $0 \leqslant \text{AP} \leqslant \text{AB} = 4$.
2. **a.** Le triangle APS est rectangle en A. Son aire est donc $\text{aire(APS)} = \dfrac{\text{AP} \times \text{AS}}{2} = \dfrac{x(4-x)}{2}$.
   b. De la même façon, $\text{aire(BPQ)} = \text{aire(QCR)} = \text{aire(RDS)} = \dfrac{x(4-x)}{2}$. Or, l'aire du carré ABCD est $4^2 = 16$ donc l'aire du quadrilatère PQRS est

$$\text{aire(PQRS)} = 16 - 4 \times \frac{x(4-x)}{2} = 16 - 2x(4-x) = 16 - 8x + 2x^2$$

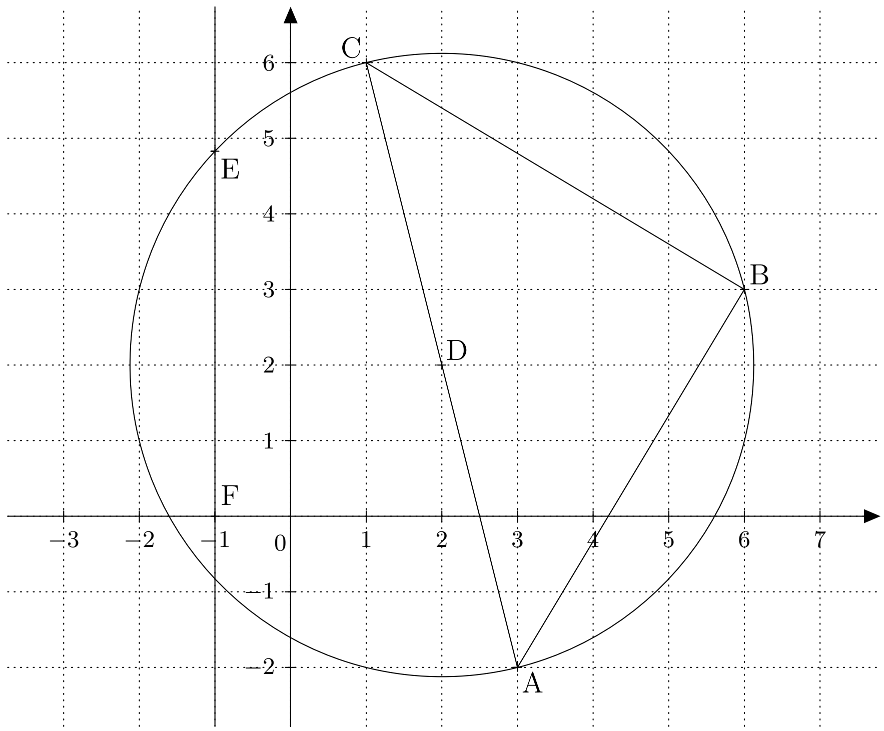
   c'est-à-dire $\boxed{\text{aire(PQRS)} = 2x^2 - 8x + 16 = f(x)}$.
3. **a.** On a vu, graphiquement, que la fonction f atteint son minimum sur $[0\,;4]$ en 2 donc on peut conjecturer que l'aire de PQRS est minimale si P est au milieu de [AB].
   b. On a vu, graphiquement, que les solutions de l'équation $f(x) = 10$ sont 1 et 3 donc on peut conjecturer que l'aire de PQRS est égale à 10 si P est au quart ou au trois-quarts de [AB].
4. Soit $x \in [0\,;4]$. Alors, $2(x-2)^2+8 = 2(x^2-4x+4)+8 = 2x^2-8x+8+8 = 2x^2-8x+16 = f(x)$.
   Ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } x \in [0\,;4],\ f(x) = 2(x-2)^2+8}$.
5. **a.** Pour tout tout $x \in [0\,;4]$, $f(x) - 8 = 2(x-2)^2 \geq 0$. Or, $(x-2)^2 \geq 0$ donc $2(x-2)^2 \geq 0$ et ainsi $f(x) - 8 \geq 0$. On en déduit que, pour tout $x \in [0\,;4]$, $f(x) \geq 8$.
   Comme $f(2) = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 16 = 8$, pour tout $x \in [0\,;4]$, $f(x) \geq f(2)$ donc f atteint bien son minimum sur $[0\,;4]$ en 2 et donc la conjecture de la question 3.a est vérifiée.
   b. Pour tout $x \in [0\,;4]$, $f(x) \geq 8$,

$$\begin{aligned} f(x) = 10 &\Leftrightarrow 2(x-2)^2+8 = 10 \Leftrightarrow 2(x-2)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 - 1^2 = 0 \Leftrightarrow [(x-2)-1][(x-2)+1] = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-3)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x-3 = 0 \text{ ou } x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = 1. \end{aligned}$$

   On conclut que l'ensemble des solutions de $f(x) = 10$ est $\{1, 3\}$ et donc la conjecture de la question 3.b est également vérifiée.

EXERCICE 2

1.



2. $AB = \sqrt{(6-3)^2 + (3-(-2))^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$, $AC = \sqrt{(1-3)^2 + (6-(-2))^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$ et $BC = \sqrt{(1-6)^2+(6-3)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$. Ainsi, AB = BC donc ABC est isocèle en B. De plus, $AB^2 + BC^2 = 34 + 34 = 68 = AC^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.
On conclut donc que $\boxed{\text{ABC est isocèle rectangle en B}}$.

3. Par propriété, $x_D = \dfrac{3+1}{2} = 2$ et $y_D = \dfrac{6+(-2)}{2} = 2$. Ainsi, $\boxed{D\,(2\,;2)}$.

4. Comme ABC est rectangle en B, le triangle ABC est inscrit dans le cercle de diamètre [AC] c'est-à-dire le cercle de centre D et de rayon $\dfrac{AC}{2}$. Ainsi, les points A, B et C appartiennent au cercle $\mathscr{C}$ de centre D et de rayon $R = \dfrac{\sqrt{68}}{2} = \dfrac{2\sqrt{17}}{2}$ soit $\boxed{R = \sqrt{17}}$.

5. a. $DE = \sqrt{(-1-2)^2 + (2+2\sqrt{2}-2)^2} = \sqrt{9+(2\sqrt{2})^2} = \sqrt{9+4\times 2} = \sqrt{17} = R$ donc <u>E appartient au cercle $\mathscr{C}$</u>.

b. Pour construire le point E, on trace la $\mathscr{D}$ parallèle à l'axe de ordonnées et passant par le point $F\,(-1\,;0)$. Cette droite coupe le cercle $\mathscr{C}$ en deux points. Le point E est, parmi ces deux points, celui qui a un ordonnée positive.

EXERCICE 3

1. Voir ci-dessous. L'univers de cette expérience est $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

2. On modélise l'expérience par l'équiprobabilité sur l'ensemble des 36 lancers possibles. Il y a 18 lancers qui réalisent A donc $\boxed{P(A) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}}$. De même, il y a 15 lancers qui réalisent B donc $\boxed{P(B) = \dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12}}$.

3. L'évènement $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ est « Obtenir un chiffre pair et strictement supérieur à 7 ». Il y a 9 lancers qui réalisent $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ donc $\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}}$.

4. L'évènement $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ est « Obtenir un chiffre pair ou un chiffre strictement supérieur à 7 ». Par propriété, $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{12} - \dfrac{1}{4}$ soit $\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \dfrac{2}{3}}$.

5. L'évènement $\mathrm{C} = \overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}}$ est « Obtenir un chiffre qui n'est pas un chiffre pair ou un chiffre strictement supérieur à 7 ». Autrement dit, $\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}}$ est l'évènement « Obtenir un chiffre impair et inférieur ou égal à 7 ».

Par propriété, $\mathrm{P}(C) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 1 - \dfrac{2}{3}$ soit $\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{C}) = \dfrac{1}{3}}$.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

Exercice 4

1. Pour tous réels a et b, $(a^2+b)^2 = (a^2)^2 + 2a^2b + b^2 = a^4 + 2a^2b + b^2$.

2. $f(-1) = -(-1)^2 + 2 \times (-1) + 1 = -1 - 2 + 1 = -2$

3. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}(x+1)^2 = 1 &\Leftrightarrow (x+1)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow [(x+1)-1][(x+1)+1] = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x+2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -2.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de $(x+1)^2 = 1$ est $\{-2, 0\}$.

4. Comme $3x = -\dfrac{3}{2} \leq -1$, on calcule $x^2 + 1 = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1 = \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{5}{4}$.

Sujet A

Question 1	a	b	c	d
Question 2	a	b	c	d
Question 3	a	b	c	d
Question 4	a	b	c	d

Sujet B

Question 1	a	b	c	d
Question 2	a	b	c	d
Question 3	a	b	c	d
Question 4	a	b	c	d