Corrigé de l'exercice 1

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto -2\,x^2 - 30\,x - 112$.

▶1. **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}-2\,(x+7)\,(x+8) &= -2\,(x \times x + 7 \times x + 8 \times x + 7 \times 8)\\ &= -2\,\left(x^2 + 15\,x + 56\right)\\ &= -2 \times x^2 - 2 \times 15\,x - 2 \times 56\\ &= -2\,x^2 - 30\,x - 112\\ &= f\,(x)\end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}-2\,(x+7{,}5)^2 + 0{,}50 &= -2\,\left(x^2 + 2 \times 7{,}5 \times x + 7{,}5^2\right) + 0{,}50\\ &= -2\,\left(x^2 + 15\,x + 56{,}25\right) + 0{,}50\\ &= -2 \times x^2 - 2 \times 15\,x - 2 \times 56{,}25 + 0{,}50\\ &= -2\,x^2 - 30\,x - 112{,}50 + 0{,}50\\ &= -2\,x^2 - 30\,x - 112\\ &= f\,(x)\end{aligned}$$

▶2. Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.

a) En prenant la forme factorisée, l'équation $f\,(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $-2\,(x+7)\,(x+8) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned}x + 7 = 0 &\text{ ou } x + 8 = 0\\ x = -7 &\text{ ou } x = -8\end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : -7 et -8.

b) $f\,(x) = -112$ On remarque que la forme développée contient la constante -112 : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned}f\,(x) &= -112\\ -2\,x^2 - 30\,x - 112 &= -112\\ -2\,x^2 - 30\,x - 112 + 112 &= -112 + 112\\ -2\,x^2 - 30\,x &= 0\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par x, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned}-2\,x^2 - 30\,x &= 0\\ -2\,x \times x - 30 \times x &= 0\\ x\,(-2\,x - 30) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&x = 0 \text{ ou } -2\,x - 30 = 0\\ &x = 0 \text{ ou } -2\,x = 30\\ &x = 0 \text{ ou } x = \frac{30}{-2}\\ &x = 0 \text{ ou } x = -15\end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = -15$.

c) $f(x) = 0{,}50$ On remarque que la forme canonique contient la constante $0{,}50$: en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0{,}50 \\ -2\,(x+7{,}5)^2 + 0{,}50 &= 0{,}50 \\ -2\,(x+7{,}5)^2 + 0{,}50 - 0{,}50 &= 0{,}50 - 0{,}50 \\ -2\,(x+7{,}5)^2 &= 0 \\ (x+7{,}5)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x + 7{,}5 &= 0 \\ x &= -7{,}5 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = -7{,}5$.

▶3. **a)** *Dresser le tableau de variations de f.* Dans la forme développée, le coefficient devant le x^2 est négatif , donc la fonction est croissante puis décroissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{-30}{2\times(-2)}$, soit $-7{,}5$, et $f(-7{,}5) = -2 \times (-7{,}5)^2 - 30 \times (-7{,}5) - 112 = 0{,}50$. Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$		$-7{,}5$		$+\infty$
$f(x)$		↗	$0{,}50$	↘	

b) *Dresser le tableau de signes de f.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f(x) = -2\,(x+7)\,(x+8)$.

- Le premier facteur $x+7$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 7$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{7}{1} = -7$.
- Le second facteur $x+8$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 8$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{8}{1} = -8$.

x	$-\infty$		-8		-7		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$	
$x + 7$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 8$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x) = -2\,(x+7)\,(x+8)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

▶4. Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

a) *Résoudre $f(x) \geqslant 0$.* En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que f est positive sur l'intervalle central . Les solutions sont donc :

$x \in [-8\,;\,-7]$

b) *Quel est l'extremum de f ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus grande valeur prise par f est 0,50. Le maximum de f est donc 0,50, et il est atteint pour $x = -7{,}5$.

Corrigé de l'exercice 2

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto 0{,}5\,x^2 + 3{,}5\,x - 22$.

▶1. **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
0{,}5\ (x+11)\ (x-4) &= 0{,}5\ (x \times x + 11 \times x - 4 \times x + 11 \times (-4)) \\
&= 0{,}5\ \left(x^2 + 7\,x - 44\right) \\
&= 0{,}5 \times x^2 + 0{,}5 \times 7\,x + 0{,}5 \times (-44) \\
&= 0{,}5\,x^2 + 3{,}5\,x - 22 \\
&= f\,(x)
\end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
0{,}5\ (x+3{,}5)^2 - 28{,}125 &= 0{,}5\ \left(x^2 + 2 \times 3{,}5 \times x + 3{,}5^2\right) - 28{,}125 \\
&= 0{,}5\ \left(x^2 + 7\,x + 12{,}25\right) - 28{,}125 \\
&= 0{,}5 \times x^2 + 0{,}5 \times 7\,x + 0{,}5 \times 12{,}25 - 28{,}125 \\
&= 0{,}5\,x^2 + 3{,}5\,x + 6{,}125 - 28{,}125 \\
&= 0{,}5\,x^2 + 3{,}5\,x - 22 \\
&= f\,(x)
\end{aligned}$$

▶2. Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.

a) En prenant la forme factorisée, l'équation $f\,(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $0{,}5\,(x+11)\,(x-4) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned}
x + 11 = 0 &\text{ ou } x - 4 = 0 \\
x = -11 &\text{ ou } x = 4
\end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : -11 et 4.

b) $f\,(x) = -22$ On remarque que la forme développée contient la constante -22 : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned}
f\,(x) &= -22 \\
0{,}5\,x^2 + 3{,}5\,x - 22 &= -22 \\
0{,}5\,x^2 + 3{,}5\,x - 22 + 22 &= -22 + 22 \\
0{,}5\,x^2 + 3{,}5\,x &= 0
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par x, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned}
0{,}5\,x^2 + 3{,}5\,x &= 0 \\
0{,}5\,x \times x + 3{,}5 \times x &= 0 \\
x\ (0{,}5\,x + 3{,}5) &= 0
\end{aligned}$$

$x = 0$ ou $0{,}5\,x + 3{,}5 = 0$
$x = 0$ ou $0{,}5\,x = -3{,}5$
$x = 0$ ou $x = \dfrac{-3{,}5}{0{,}5}$
$x = 0$ ou $x = -7$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = -7$.

c) $f\left(x\right) = -28{,}125$ On remarque que la forme canonique contient la constante $-28{,}125$: en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f\left(x\right) &= -28{,}125 \\ 0{,}5\,\left(x + 3{,}5\right)^2 - 28{,}125 &= -28{,}125 \\ 0{,}5\,\left(x + 3{,}5\right)^2 - 28{,}125 + 28{,}125 &= -28{,}125 + 28{,}125 \\ 0{,}5\,\left(x + 3{,}5\right)^2 &= 0 \\ \left(x + 3{,}5\right)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$x + 3{,}5 = 0$
$x = -3{,}5$

Il y a donc une unique solution $x = -3{,}5$.

►3. a) *Dresser le tableau de variations de f.* Dans la forme développée, le coefficient devant le x^2 est positif , donc la fonction est décroissante puis croissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{3{,}5}{2\times 0{,}5}$, soit $-3{,}5$, et $f\left(-3{,}5\right) = 0{,}5 \times \left(-3{,}5\right)^2 + 3{,}5 \times \left(-3{,}5\right) - 22 = -28{,}125$. Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$		$-3{,}5$		$+\infty$
$f\left(x\right)$		$\searrow$	$-28{,}125$	$\nearrow$	

b) *Dresser le tableau de signes de f.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f\left(x\right) = 0{,}5\,\left(x + 11\right)\,\left(x - 4\right)$.

- Le premier facteur $x + 11$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 11$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{11}{1} = -11$.
- Le second facteur $x - 4$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = -4$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-4}{1} = 4$.

x	$-\infty$		-11		4		$+\infty$
0,5		$+$		$+$		$+$	
$x + 11$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 4$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) =$ $0{,}5\ (x+11)\ (x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

►4. Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

a) *Résoudre* $f(x) \geqslant 0$. En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que f est positive sur les premier et dernier intervalles . Les solutions sont donc :

$x \in \left]-\infty\,;\,-11\right] \cup \left[4\,;\,+\infty\right[$

b) *Quel est l'extremum de f ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus petite valeur prise par f est $-28{,}125$. Le minimum de f est donc $-28{,}125$, et il est atteint pour $x = -3{,}5$.

Corrigé de l'exercice 3

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto 0{,}5\,x^2 - 9{,}5\,x + 42$.

►1. **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
0{,}5\ (x-7)\ (x-12) &= 0{,}5\ (x \times x - 7 \times x - 12 \times x - 7 \times\ (-12)) \\
&= 0{,}5\ \left(x^2 - 19\,x + 84\right) \\
&= 0{,}5 \times x^2 + 0{,}5 \times\ (-19\,x) + 0{,}5 \times 84 \\
&= 0{,}5\,x^2 - 9{,}5\,x + 42 \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
0{,}5\ (x-9{,}5)^2 - 3{,}125 &= 0{,}5\ \left(x^2 - 2 \times 9{,}5 \times x + 9{,}5^2\right) - 3{,}125 \\
&= 0{,}5\ \left(x^2 - 19\,x + 90{,}25\right) - 3{,}125 \\
&= 0{,}5 \times x^2 + 0{,}5 \times\ (-19\,x) + 0{,}5 \times 90{,}25 - 3{,}125 \\
&= 0{,}5\,x^2 - 9{,}5\,x + 45{,}125 - 3{,}125 \\
&= 0{,}5\,x^2 - 9{,}5\,x + 42 \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

►2. Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.

a) En prenant la forme factorisée, l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $0{,}5\,(x-7)\,(x-12) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned}
x - 7 = 0 &\text{ ou } x - 12 = 0 \\
x = 7 &\text{ ou } x = 12
\end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : 7 et 12.

b) $f(x) = 42$ On remarque que la forme développée contient la constante 42 : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned} f(x) &= 42 \\ 0{,}5\,x^2 - 9{,}5\,x + 42 &= 42 \\ 0{,}5\,x^2 - 9{,}5\,x + 42 - 42 &= 42 - 42 \\ 0{,}5\,x^2 - 9{,}5\,x &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par x, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned} 0{,}5\,x^2 - 9{,}5\,x &= 0 \\ 0{,}5\,x \times x - 9{,}5 \times x &= 0 \\ x\,(0{,}5\,x - 9{,}5) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x = 0 \text{ ou } 0{,}5\,x - 9{,}5 = 0 \\ &x = 0 \text{ ou } 0{,}5\,x = 9{,}5 \\ &x = 0 \text{ ou } x = \frac{9{,}5}{0{,}5} \\ &x = 0 \text{ ou } x = 19 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = 19$.

c) $f(x) = -3{,}125$ On remarque que la forme canonique contient la constante $-3{,}125$: en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f(x) &= -3{,}125 \\ 0{,}5\,(x - 9{,}5)^2 - 3{,}125 &= -3{,}125 \\ 0{,}5\,(x - 9{,}5)^2 - 3{,}125 + 3{,}125 &= -3{,}125 + 3{,}125 \\ 0{,}5\,(x - 9{,}5)^2 &= 0 \\ (x - 9{,}5)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x - 9{,}5 &= 0 \\ x &= 9{,}5 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = 9{,}5$.

►3. **a)** *Dresser le tableau de variations de f.* Dans la forme développée, le coefficient devant le x^2 est positif , donc la fonction est décroissante puis croissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{-9{,}5}{2\times 0{,}5}$, soit 9,5, et $f(9{,}5) = 0{,}5 \times 9{,}5^2 - 9{,}5 \times 9{,}5 + 42 = -3{,}125$. Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$	$9{,}5$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$-3{,}125$	$\nearrow$

b) *Dresser le tableau de signes de f.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f(x) = 0{,}5\ (x-7)\ (x-12)$.

- Le premier facteur $x-7$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a=1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b=-7$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-7}{1} = 7$.
- Le second facteur $x-12$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a=1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b=-12$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-12}{1} = 12$.

x	$-\infty$		7		12		$+\infty$
0,5		$+$		$+$		$+$	
$x-7$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-12$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) = 0{,}5\ (x-7)\ (x-12)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

►4. Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

a) *Résoudre $f(x) \geqslant 0$.* En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que f est positive sur les premier et dernier intervalles . Les solutions sont donc :

$x \in]-\infty\,;\,7] \cup [12\,;\,+\infty[$

b) *Quel est l'extremum de f ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus petite valeur prise par f est $-3{,}125$. Le minimum de f est donc $-3{,}125$, et il est atteint pour $x = 9{,}5$.

Corrigé de l'exercice 4

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto -2\,x^2 - 2\,x + 24$.

►1. **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
-2\ (x-3)\ (x+4) &= -2\ (x \times x - 3 \times x + 4 \times x - 3 \times 4)\\
&= -2\ \left(x^2 + x - 12\right)\\
&= -2 \times x^2 - 2 \times x - 2 \times\ (-12)\\
&= -2\,x^2 - 2\,x + 24\\
&= f(x)
\end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
-2\ (x+0{,}5)^2 + 24{,}50 &= -2\ \left(x^2 + 2 \times 0{,}5 \times x + 0{,}5^2\right) + 24{,}50\\
&= -2\ \left(x^2 + x + 0{,}25\right) + 24{,}50\\
&= -2 \times x^2 - 2 \times x - 2 \times 0{,}25 + 24{,}50\\
&= -2\,x^2 - 2\,x - 0{,}50 + 24{,}50\\
&= -2\,x^2 - 2\,x + 24\\
&= f(x)
\end{aligned}$$

►**2.** Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.

a) En prenant la forme factorisée, l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $-2(x-3)(x+4) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned} x-3 = 0 &\text{ ou } x+4=0 \\ x = 3 &\text{ ou } x = -4 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : 3 et -4.

b) $f(x) = 24$ On remarque que la forme développée contient la constante 24 : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned} f(x) &= 24 \\ -2x^2 - 2x + 24 &= 24 \\ -2x^2 - 2x + 24 - 24 &= 24 - 24 \\ -2x^2 - 2x &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par x, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned} -2x^2 - 2x &= 0 \\ -2x \times x - 2 \times x &= 0 \\ x\,(-2x-2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x = 0 \text{ ou } -2x - 2 = 0 \\ &x = 0 \text{ ou } -2x = 2 \\ &x = 0 \text{ ou } x = \frac{2}{-2} \\ &x = 0 \text{ ou } x = -1 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = -1$.

c) $f(x) = 24{,}50$ On remarque que la forme canonique contient la constante 24,50 : en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f(x) &= 24{,}50 \\ -2\,(x+0{,}5)^2 + 24{,}50 &= 24{,}50 \\ -2\,(x+0{,}5)^2 + 24{,}50 - 24{,}50 &= 24{,}50 - 24{,}50 \\ -2\,(x+0{,}5)^2 &= 0 \\ (x+0{,}5)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x + 0{,}5 &= 0 \\ x &= -0{,}5 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = -0{,}5$.

▶3. **a)** *Dresser le tableau de variations de f.* Dans la forme développée, le coefficient devant le x^2 est négatif , donc la fonction est croissante puis décroissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{-2}{2\times(-2)}$, soit $-0{,}5$, et $f(-0{,}5) = -2\times(-0{,}5)^2 - 2\times(-0{,}5) + 24 = 24{,}50$. Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$		$-0{,}5$		$+\infty$
$f(x)$		↗	$24{,}50$	↘	

b) *Dresser le tableau de signes de f.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f(x) = -2\,(x-3)\,(x+4)$.

- Le premier facteur $x-3$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a=1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b=-3$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-3}{1} = 3$.
- Le second facteur $x+4$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a=1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b=4$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{4}{1} = -4$.

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x) = -2\,(x-3)\,(x+4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

▶4. Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

a) *Résoudre $f(x) \geqslant 0$.* En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que f est positive sur l'intervalle central . Les solutions sont donc :

$x \in [-4\,;\,3]$

b) *Quel est l'extremum de f ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus grande valeur prise par f est 24,50. Le maximum de f est donc 24,50, et il est atteint pour $x = -0{,}5$.