Corrigé de l'exercice 1

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto -0{,}5\,x^2 - 7\,x - 12$.

►1. **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}-0{,}5\,(x+12)\,(x+2) &= -0{,}5\,(x \times x + 12 \times x + 2 \times x + 12 \times 2)\\ &= -0{,}5\,\left(x^2 + 14\,x + 24\right)\\ &= -0{,}5 \times x^2 - 0{,}5 \times 14\,x - 0{,}5 \times 24\\ &= -0{,}5\,x^2 - 7\,x - 12\\ &= f\,(x)\end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}-0{,}5\,(x+7)^2 + 12{,}5 &= -0{,}5\,\left(x^2 + 2 \times 7 \times x + 7^2\right) + 12{,}5\\ &= -0{,}5\,\left(x^2 + 14\,x + 49\right) + 12{,}5\\ &= -0{,}5 \times x^2 - 0{,}5 \times 14\,x - 0{,}5 \times 49 + 12{,}5\\ &= -0{,}5\,x^2 - 7\,x - 24{,}5 + 12{,}5\\ &= -0{,}5\,x^2 - 7\,x - 12\\ &= f\,(x)\end{aligned}$$

►2. Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.

a) En prenant la forme factorisée, l'équation $f\,(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $-0{,}5\,(x+12)\,(x+2) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned}x + 12 = 0 &\text{ ou } x + 2 = 0\\ x = -12 &\text{ ou } x = -2\end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : -12 et -2.

b) $f\,(x) = -12$ On remarque que la forme développée contient la constante -12 : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned}f\,(x) &= -12\\ -0{,}5\,x^2 - 7\,x - 12 &= -12\\ -0{,}5\,x^2 - 7\,x - 12 + 12 &= -12 + 12\\ -0{,}5\,x^2 - 7\,x &= 0\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par x, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned}-0{,}5\,x^2 - 7\,x &= 0\\ -0{,}5\,x \times x - 7 \times x &= 0\\ x\,(-0{,}5\,x - 7) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&x = 0 \text{ ou } -0{,}5\,x - 7 = 0\\ &x = 0 \text{ ou } -0{,}5\,x = 7\\ &x = 0 \text{ ou } x = \frac{7}{-0{,}5}\\ &x = 0 \text{ ou } x = -14\end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = -14$.

c) $f(x) = 12{,}5$ On remarque que la forme canonique contient la constante 12,5 : en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f(x) &= 12{,}5 \\ -0{,}5\,(x+7)^2 + 12{,}5 &= 12{,}5 \\ -0{,}5\,(x+7)^2 + 12{,}5 - 12{,}5 &= 12{,}5 - 12{,}5 \\ -0{,}5\,(x+7)^2 &= 0 \\ (x+7)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x+7 &= 0 \\ x &= -7 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = -7$.

▶3. **a)** *Dresser le tableau de variations de f.* Dans la forme développée, le coefficient devant le x^2 est négatif , donc la fonction est croissante puis décroissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{-7}{2\times(-0{,}5)}$, soit -7, et $f(-7) = -0{,}5 \times (-7)^2 - 7 \times (-7) - 12 = 12{,}5$. Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$		-7		$+\infty$
$f(x)$		↗	$12{,}5$	↘	

b) *Dresser le tableau de signes de f.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f(x) = -0{,}5\,(x+12)\,(x+2)$.

- Le premier facteur $x+12$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 12$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{12}{1} = -12$.
- Le second facteur $x+2$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 2$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{2}{1} = -2$.

x	$-\infty$		-12		-2		$+\infty$
$-0{,}5$		$-$		$-$		$-$	
$x + 12$		$-$	0	$+$		$+$	
$x + 2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) = -0{,}5\,(x+12)\,(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

▶4. Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

a) *Résoudre $f(x) \geqslant 0$.* En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que f est positive sur l'intervalle central . Les solutions sont donc :

$x \in [-12\,;\,-2]$

b) *Quel est l'extremum de f ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus grande valeur prise par f est 12,5. Le maximum de f est donc 12,5, et il est atteint pour $x = -7$.

Corrigé de l'exercice 2

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto 2\,x^2 + 50\,x + 312$.

►**1.** **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} 2\,(x+13)\,(x+12) &= 2\,(x \times x + 13 \times x + 12 \times x + 13 \times 12) \\ &= 2\,\left(x^2 + 25\,x + 156\right) \\ &= 2 \times x^2 + 2 \times 25\,x + 2 \times 156 \\ &= 2\,x^2 + 50\,x + 312 \\ &= f\,(x) \end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} 2\,(x+12{,}5)^2 - 0{,}50 &= 2\,\left(x^2 + 2 \times 12{,}5 \times x + 12{,}5^2\right) - 0{,}50 \\ &= 2\,\left(x^2 + 25\,x + 156{,}25\right) - 0{,}50 \\ &= 2 \times x^2 + 2 \times 25\,x + 2 \times 156{,}25 - 0{,}50 \\ &= 2\,x^2 + 50\,x + 312{,}50 - 0{,}50 \\ &= 2\,x^2 + 50\,x + 312 \\ &= f\,(x) \end{aligned}$$

►**2.** Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.

a) En prenant la forme factorisée, l'équation $f\,(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $2\,(x+13)\,(x+12) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned} x + 13 = 0 &\text{ ou } x + 12 = 0 \\ x = -13 &\text{ ou } x = -12 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : -13 et -12.

b) $f\,(x) = 312$ On remarque que la forme développée contient la constante 312 : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned} f\,(x) &= 312 \\ 2\,x^2 + 50\,x + 312 &= 312 \\ 2\,x^2 + 50\,x + 312 - 312 &= 312 - 312 \\ 2\,x^2 + 50\,x &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par x, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned} 2\,x^2 + 50\,x &= 0 \\ 2\,x \times x + 50 \times x &= 0 \\ x\,(2\,x + 50) &= 0 \end{aligned}$$

$x = 0$ ou $2\,x + 50 = 0$
$x = 0$ ou $2\,x = -50$
$x = 0$ ou $x = \dfrac{-50}{2}$
$x = 0$ ou $x = -25$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = -25$.

c) $f\,(x) = -0{,}50$ On remarque que la forme canonique contient la constante $-0{,}50$: en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f\,(x) &= -0{,}50 \\ 2\,(x+12{,}5)^2 - 0{,}50 &= -0{,}50 \\ 2\,(x+12{,}5)^2 - 0{,}50 + 0{,}50 &= -0{,}50 + 0{,}50 \\ 2\,(x+12{,}5)^2 &= 0 \\ (x+12{,}5)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x + 12{,}5 &= 0 \\ x &= -12{,}5 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = -12{,}5$.

▶3. **a)** *Dresser le tableau de variations de f.* Dans la forme développée, le coefficient devant le x^2 est positif , donc la fonction est décroissante puis croissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{50}{2\times 2}$, soit $-12{,}5$, et $f\,(-12{,}5) = 2 \times\ (-12{,}5)^2 + 50 \times\ (-12{,}5) + 312 = -0{,}50$. Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$	$-12{,}5$	$+\infty$
$f\,(x)$	$\searrow$	$-0{,}50$	$\nearrow$

b) *Dresser le tableau de signes de f.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f\,(x) = 2\,(x+13)\,(x+12)$.

- Le premier facteur $x + 13$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 13$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{13}{1} = -13$.
- Le second facteur $x + 12$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 12$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{12}{1} = -12$.

x	$-\infty$		-13		-12		$+\infty$
2		$+$		$+$		$+$	
$x + 13$		$-$	0	$+$		$+$	
$x + 12$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) = 2(x+13)(x+12)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

►**4.** Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

a) *Résoudre* $f(x) \geqslant 0$. En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que f est positive sur les premier et dernier intervalles . Les solutions sont donc :

$x \in \left]-\infty\,;\,-13\right] \cup \left[-12\,;\,+\infty\right[$

b) *Quel est l'extremum de* f *? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de* x *est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus petite valeur prise par f est $-0{,}50$. Le minimum de f est donc $-0{,}50$, et il est atteint pour $x = -12{,}5$.

Corrigé de l'exercice 3

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto -0{,}5\,x^2 - 11{,}5\,x - 65$.

►**1.** **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}-0{,}5\,(x+13)\,(x+10) &= -0{,}5\,(x\times x + 13\times x + 10\times x + 13\times 10)\\ &= -0{,}5\,\left(x^2 + 23\,x + 130\right)\\ &= -0{,}5\times x^2 - 0{,}5\times 23\,x - 0{,}5\times 130\\ &= -0{,}5\,x^2 - 11{,}5\,x - 65\\ &= f(x)\end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}-0{,}5\,(x+11{,}5)^2 + 1{,}125 &= -0{,}5\,\left(x^2 + 2\times 11{,}5\times x + 11{,}5^2\right) + 1{,}125\\ &= -0{,}5\,\left(x^2 + 23\,x + 132{,}25\right) + 1{,}125\\ &= -0{,}5\times x^2 - 0{,}5\times 23\,x - 0{,}5\times 132{,}25 + 1{,}125\\ &= -0{,}5\,x^2 - 11{,}5\,x - 66{,}125 + 1{,}125\\ &= -0{,}5\,x^2 - 11{,}5\,x - 65\\ &= f(x)\end{aligned}$$

►**2.** Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.

a) En prenant la forme factorisée, l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $-0{,}5\,(x+13)\,(x+10) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned}x + 13 = 0 &\text{ ou } x + 10 = 0\\ x = -13 &\text{ ou } x = -10\end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : -13 et -10.

b) $f(x) = -65$ On remarque que la forme développée contient la constante -65 : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned} f(x) &= -65 \\ -0{,}5\,x^2 - 11{,}5\,x - 65 &= -65 \\ -0{,}5\,x^2 - 11{,}5\,x - 65 + 65 &= -65 + 65 \\ -0{,}5\,x^2 - 11{,}5\,x &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par x, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned} -0{,}5\,x^2 - 11{,}5\,x &= 0 \\ -0{,}5\,x \times x - 11{,}5 \times x &= 0 \\ x\,(-0{,}5\,x - 11{,}5) &= 0 \end{aligned}$$

$x = 0$ ou $-0{,}5\,x - 11{,}5 = 0$
$x = 0$ ou $-0{,}5\,x = 11{,}5$
$x = 0$ ou $x = \dfrac{11{,}5}{-0{,}5}$
$x = 0$ ou $x = -23$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = -23$.

c) $f(x) = 1{,}125$ On remarque que la forme canonique contient la constante $1{,}125$: en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f(x) &= 1{,}125 \\ -0{,}5\,(x + 11{,}5)^2 + 1{,}125 &= 1{,}125 \\ -0{,}5\,(x + 11{,}5)^2 + 1{,}125 - 1{,}125 &= 1{,}125 - 1{,}125 \\ -0{,}5\,(x + 11{,}5)^2 &= 0 \\ (x + 11{,}5)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x + 11{,}5 &= 0 \\ x &= -11{,}5 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = -11{,}5$.

►3. a) *Dresser le tableau de variations de f.* Dans la forme développée, le coefficient devant le x^2 est négatif , donc la fonction est croissante puis décroissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{-11{,}5}{2\times(-0{,}5)}$, soit $-11{,}5$, et $f(-11{,}5) = -0{,}5 \times (-11{,}5)^2 - 11{,}5 \times (-11{,}5) - 65 = 1{,}125$. Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$	$-11{,}5$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$1{,}125$	$\searrow$

b) *Dresser le tableau de signes de f.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f(x) = -0{,}5\ (x+13)\ (x+10)$.

- Le premier facteur $x+13$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a=1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b=13$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{13}{1} = -13$.
- Le second facteur $x+10$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a=1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b=10$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{10}{1} = -10$.

x	$-\infty$		-13		-10		$+\infty$
$-0{,}5$		$-$		$-$		$-$	
$x + 13$		$-$	0	$+$		$+$	
$x + 10$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) = -0{,}5\ (x+13)\ (x+10)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

►4. Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

a) *Résoudre $f(x) \geqslant 0$.* En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que f est positive sur l'intervalle central . Les solutions sont donc :

$x \in [-13\,;\,-10]$

b) *Quel est l'extremum de f ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus grande valeur prise par f est 1,125. Le maximum de f est donc 1,125, et il est atteint pour $x = -11{,}5$.

Corrigé de l'exercice 4

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto -2\,x^2 + 20\,x + 48$.

►1. a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
-2\ (x-12)\ (x+2) &= -2\ (x \times x - 12 \times x + 2 \times x - 12 \times 2) \\
&= -2\ \left(x^2 - 10\,x - 24\right) \\
&= -2 \times x^2 - 2 \times\ (-10\,x) - 2 \times\ (-24) \\
&= -2\,x^2 + 20\,x + 48 \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
-2\ (x-5)^2 + 98 &= -2\ \left(x^2 - 2 \times 5 \times x + 5^2\right) + 98 \\
&= -2\ \left(x^2 - 10\,x + 25\right) + 98 \\
&= -2 \times x^2 - 2 \times\ (-10\,x) - 2 \times 25 + 98 \\
&= -2\,x^2 + 20\,x - 50 + 98 \\
&= -2\,x^2 + 20\,x + 48 \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

►**2.** Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.

a) En prenant la forme factorisée, l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $-2(x-12)(x+2) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned} x - 12 = 0 &\text{ ou } x + 2 = 0 \\ x = 12 &\text{ ou } x = -2 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : 12 et -2.

b) $f(x) = 48$ On remarque que la forme développée contient la constante 48 : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned} f(x) &= 48 \\ -2x^2 + 20x + 48 &= 48 \\ -2x^2 + 20x + 48 - 48 &= 48 - 48 \\ -2x^2 + 20x &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par x, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned} -2x^2 + 20x &= 0 \\ -2x \times x + 20 \times x &= 0 \\ x(-2x + 20) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x = 0 \text{ ou } -2x + 20 = 0 \\ &x = 0 \text{ ou } -2x = -20 \\ &x = 0 \text{ ou } x = \frac{-20}{-2} \\ &x = 0 \text{ ou } x = 10 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = 10$.

c) $f(x) = 98$ On remarque que la forme canonique contient la constante 98 : en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f(x) &= 98 \\ -2(x-5)^2 + 98 &= 98 \\ -2(x-5)^2 + 98 - 98 &= 98 - 98 \\ -2(x-5)^2 &= 0 \\ (x-5)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x - 5 &= 0 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = 5$.

►3. **a)** *Dresser le tableau de variations de f.* Dans la forme développée, le coefficient devant le x^2 est négatif , donc la fonction est croissante puis décroissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{20}{2\times(-2)}$, soit 5, et $f(5) = -2 \times 5^2 + 20 \times 5 + 48 = 98$. Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	98	$\searrow$

b) *Dresser le tableau de signes de f.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f(x) = -2\,(x-12)\,(x+2)$.

- Le premier facteur $x - 12$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = -12$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-12}{1} = 12$.
- Le second facteur $x + 2$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 2$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{2}{1} = -2$.

x	$-\infty$		-2		12		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$	
$x - 12$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 2$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x) = -2\,(x-12)\,(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

►4. Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

a) *Résoudre $f(x) \geqslant 0$.* En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que f est positive sur l'intervalle central . Les solutions sont donc :

$x \in [-2\,;\,12]$

b) *Quel est l'extremum de f ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus grande valeur prise par f est 98. Le maximum de f est donc 98, et il est atteint pour $x = 5$.