Corrigé de l'exercice 1

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto 2\,x^2 - 10\,x - 100$.

▶1. **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
2\,(x+5)\,(x-10) &= 2\,(x \times x + 5 \times x - 10 \times x + 5 \times (-10)) \\
&= 2\,\left(x^2 - 5\,x - 50\right) \\
&= 2 \times x^2 + 2 \times (-5\,x) + 2 \times (-50) \\
&= 2\,x^2 - 10\,x - 100 \\
&= f\,(x)
\end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
2\,(x-2{,}5)^2 - 112{,}50 &= 2\,\left(x^2 - 2 \times 2{,}5 \times x + 2{,}5^2\right) - 112{,}50 \\
&= 2\,\left(x^2 - 5\,x + 6{,}25\right) - 112{,}50 \\
&= 2 \times x^2 + 2 \times (-5\,x) + 2 \times 6{,}25 - 112{,}50 \\
&= 2\,x^2 - 10\,x + 12{,}50 - 112{,}50 \\
&= 2\,x^2 - 10\,x - 100 \\
&= f\,(x)
\end{aligned}$$

▶2. Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.

a) En prenant la forme factorisée, l'équation $f\,(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $2\,(x+5)\,(x-10) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned}
x + 5 = 0 &\text{ ou } x - 10 = 0 \\
x = -5 &\text{ ou } x = 10
\end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : -5 et 10.

b) $f\,(x) = -100$ On remarque que la forme développée contient la constante -100 : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned}
f\,(x) &= -100 \\
2\,x^2 - 10\,x - 100 &= -100 \\
2\,x^2 - 10\,x - 100 + 100 &= -100 + 100 \\
2\,x^2 - 10\,x &= 0
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par x, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned}
2\,x^2 - 10\,x &= 0 \\
2\,x \times x - 10 \times x &= 0 \\
x\,(2\,x - 10) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x = 0 \text{ ou } 2\,x - 10 = 0 \\
&x = 0 \text{ ou } 2\,x = 10 \\
&x = 0 \text{ ou } x = \frac{10}{2} \\
&x = 0 \text{ ou } x = 5
\end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = 5$.

c) $f(x) = -112{,}50$ On remarque que la forme canonique contient la constante $-112{,}50$: en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f(x) &= -112{,}50 \\ 2\,(x-2{,}5)^2 - 112{,}50 &= -112{,}50 \\ 2\,(x-2{,}5)^2 - 112{,}50 + 112{,}50 &= -112{,}50 + 112{,}50 \\ 2\,(x-2{,}5)^2 &= 0 \\ (x-2{,}5)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x - 2{,}5 &= 0 \\ x &= 2{,}5 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = 2{,}5$.

▶3. a) *Dresser le tableau de variations de f.* Dans la forme développée, le coefficient devant le x^2 est positif , donc la fonction est décroissante puis croissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{-10}{2\times 2}$, soit 2,5, et $f(2{,}5) = 2\times 2{,}5^2 - 10\times 2{,}5 - 100 = -112{,}50$. Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$		$2{,}5$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$-112{,}50$	$\nearrow$	

b) *Dresser le tableau de signes de f.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f(x) = 2\,(x+5)\,(x-10)$.

- Le premier facteur $x+5$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 5$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{5}{1} = -5$.
- Le second facteur $x-10$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = -10$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-10}{1} = 10$.

x	$-\infty$		-5		10		$+\infty$
2		$+$		$+$		$+$	
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-10$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) = 2\,(x+5)\,(x-10)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

▶4. Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

a) *Résoudre $f(x) \geqslant 0$.* En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que f est positive sur les premier et dernier intervalles . Les solutions sont donc :

$x \in \left]-\infty\,;\,-5\right] \cup \left[10\,;\,+\infty\right[$

b) *Quel est l'extremum de f ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus petite valeur prise par f est $-112{,}50$. Le minimum de f est donc $-112{,}50$, et il est atteint pour $x = 2{,}5$.

Corrigé de l'exercice 2

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto -0{,}5\,x^2 + 1{,}5\,x + 65$.

►1. **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
-0{,}5\,(x+10)\,(x-13) &= -0{,}5\,(x \times x + 10 \times x - 13 \times x + 10 \times (-13)) \\
&= -0{,}5\,\left(x^2 - 3\,x - 130\right) \\
&= -0{,}5 \times x^2 - 0{,}5 \times (-3\,x) - 0{,}5 \times (-130) \\
&= -0{,}5\,x^2 + 1{,}5\,x + 65 \\
&= f\,(x)
\end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
-0{,}5\,(x-1{,}5)^2 + 66{,}125 &= -0{,}5\,\left(x^2 - 2 \times 1{,}5 \times x + 1{,}5^2\right) + 66{,}125 \\
&= -0{,}5\,\left(x^2 - 3\,x + 2{,}25\right) + 66{,}125 \\
&= -0{,}5 \times x^2 - 0{,}5 \times (-3\,x) - 0{,}5 \times 2{,}25 + 66{,}125 \\
&= -0{,}5\,x^2 + 1{,}5\,x - 1{,}125 + 66{,}125 \\
&= -0{,}5\,x^2 + 1{,}5\,x + 65 \\
&= f\,(x)
\end{aligned}$$

►2. Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.

a) En prenant la forme factorisée, l'équation $f\,(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $-0{,}5\,(x+10)\,(x-13) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned}
x + 10 = 0 &\text{ ou } x - 13 = 0 \\
x = -10 &\text{ ou } x = 13
\end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : -10 et 13.

b) $f\,(x) = 65$ On remarque que la forme développée contient la constante 65 : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned}
f\,(x) &= 65 \\
-0{,}5\,x^2 + 1{,}5\,x + 65 &= 65 \\
-0{,}5\,x^2 + 1{,}5\,x + 65 - 65 &= 65 - 65 \\
-0{,}5\,x^2 + 1{,}5\,x &= 0
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par x, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned}
-0{,}5\,x^2 + 1{,}5\,x &= 0 \\
-0{,}5\,x \times x + 1{,}5 \times x &= 0 \\
x\,(-0{,}5\,x + 1{,}5) &= 0
\end{aligned}$$

$x=0$ ou $-0{,}5\,x+1{,}5=0$

$x=0$ ou $-0{,}5\,x=-1{,}5$

$x=0$ ou $x=\dfrac{-1{,}5}{-0{,}5}$

$x=0$ ou $x=3$

Il y a donc deux solutions : $x=0$ et $x=3$.

c) $f\left(x\right)=66{,}125$ On remarque que la forme canonique contient la constante 66,125 : en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned}
f\left(x\right) &= 66{,}125\\
-0{,}5\,\left(x-1{,}5\right)^2+66{,}125 &= 66{,}125\\
-0{,}5\,\left(x-1{,}5\right)^2+66{,}125-66{,}125 &= 66{,}125-66{,}125\\
-0{,}5\,\left(x-1{,}5\right)^2 &= 0\\
\left(x-1{,}5\right)^2 &= 0
\end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned}
x-1{,}5 &= 0\\
x &= 1{,}5
\end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x=1{,}5$.

▶3. **a)** *Dresser le tableau de variations de f.* Dans la forme développée, le coefficient devant le x^2 est négatif , donc la fonction est croissante puis décroissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{1{,}5}{2\times(-0{,}5)}$, soit 1,5, et $f\left(1{,}5\right)=-0{,}5\times1{,}5^2+1{,}5\times1{,}5+65=66{,}125$. Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$	$1{,}5$	$+\infty$
$f\left(x\right)$	$\nearrow$	$66{,}125$	$\searrow$

b) *Dresser le tableau de signes de f.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f\left(x\right)=-0{,}5\,\left(x+10\right)\,\left(x-13\right)$.

- Le premier facteur $x+10$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a=1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b=10$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a}=-\frac{10}{1}=-10$.
- Le second facteur $x-13$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a=1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b=-13$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a}=-\frac{-13}{1}=13$.

x	$-\infty$		-10		13		$+\infty$
$-0{,}5$		$-$		$-$		$-$	
$x + 10$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 13$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) = -0{,}5\,(x+10)\,(x-13)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

▶4. Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

a) *Résoudre* $f(x) \geqslant 0$. En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que f est positive sur l'intervalle central . Les solutions sont donc :

$x \in [-10\,;\,13]$

b) *Quel est l'extremum de f ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus grande valeur prise par f est 66,125. Le maximum de f est donc 66,125, et il est atteint pour $x = 1{,}5$.

Corrigé de l'exercice 3

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto -2\,x^2 - 2\,x + 364$.

▶1. a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}-2\,(x+14)\,(x-13) &= -2\,(x \times x + 14 \times x - 13 \times x + 14 \times (-13))\\ &= -2\left(x^2 + x - 182\right)\\ &= -2 \times x^2 - 2 \times x - 2 \times (-182)\\ &= -2\,x^2 - 2\,x + 364\\ &= f(x)\end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}-2\,(x+0{,}5)^2 + 364{,}50 &= -2\left(x^2 + 2 \times 0{,}5 \times x + 0{,}5^2\right) + 364{,}50\\ &= -2\left(x^2 + x + 0{,}25\right) + 364{,}50\\ &= -2 \times x^2 - 2 \times x - 2 \times 0{,}25 + 364{,}50\\ &= -2\,x^2 - 2\,x - 0{,}50 + 364{,}50\\ &= -2\,x^2 - 2\,x + 364\\ &= f(x)\end{aligned}$$

▶2. Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.

a) En prenant la forme factorisée, l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $-2\,(x+14)\,(x-13) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned}x + 14 = 0 &\text{ ou } x - 13 = 0\\ x = -14 &\text{ ou } x = 13\end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : -14 et 13.

b) $f(x) = 364$ On remarque que la forme développée contient la constante 364 : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned} f(x) &= 364 \\ -2\,x^2 - 2\,x + 364 &= 364 \\ -2\,x^2 - 2\,x + 364 - 364 &= 364 - 364 \\ -2\,x^2 - 2\,x &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par x, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned} -2\,x^2 - 2\,x &= 0 \\ -2\,x \times x - 2 \times x &= 0 \\ x\,(-2\,x - 2) &= 0 \end{aligned}$$

$x = 0$ ou $-2\,x - 2 = 0$

$x = 0$ ou $-2\,x = 2$

$x = 0$ ou $x = \dfrac{2}{-2}$

$x = 0$ ou $x = -1$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = -1$.

c) $f(x) = 364{,}50$ On remarque que la forme canonique contient la constante 364,50 : en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f(x) &= 364{,}50 \\ -2\,(x + 0{,}5)^2 + 364{,}50 &= 364{,}50 \\ -2\,(x + 0{,}5)^2 + 364{,}50 - 364{,}50 &= 364{,}50 - 364{,}50 \\ -2\,(x + 0{,}5)^2 &= 0 \\ (x + 0{,}5)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x + 0{,}5 &= 0 \\ x &= -0{,}5 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = -0{,}5$.

►3. a) *Dresser le tableau de variations de f.* Dans la forme développée, le coefficient devant le x^2 est négatif , donc la fonction est croissante puis décroissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{-2}{2\times(-2)}$, soit $-0{,}5$, et $f(-0{,}5) = -2 \times (-0{,}5)^2 - 2 \times (-0{,}5) + 364 = 364{,}50$. Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$		$-0{,}5$		$+\infty$
$f(x)$		↗	$364{,}50$	↘	

b) *Dresser le tableau de signes de f.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f(x) = -2\,(x+14)\,(x-13)$.

- Le premier facteur $x+14$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 14$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{14}{1} = -14$.
- Le second facteur $x-13$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = -13$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-13}{1} = 13$.

x	$-\infty$		-14		13		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$	
$x + 14$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 13$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) = -2\,(x+14)\,(x-13)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

►4. Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

a) *Résoudre $f(x) \geqslant 0$.* En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que f est positive sur l'intervalle central . Les solutions sont donc :

$x \in [-14\,;\,13]$

b) *Quel est l'extremum de f ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus grande valeur prise par f est 364,50. Le maximum de f est donc 364,50, et il est atteint pour $x = -0{,}5$.

Corrigé de l'exercice 4

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto -2\,x^2 + 12\,x + 54$.

►1. **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
-2\,(x+3)\,(x-9) &= -2\,(x \times x + 3 \times x - 9 \times x + 3 \times (-9)) \\
&= -2\left(x^2 - 6\,x - 27\right) \\
&= -2 \times x^2 - 2 \times (-6\,x) - 2 \times (-27) \\
&= -2\,x^2 + 12\,x + 54 \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
-2\,(x-3)^2 + 72 &= -2\left(x^2 - 2 \times 3 \times x + 3^2\right) + 72 \\
&= -2\left(x^2 - 6\,x + 9\right) + 72 \\
&= -2 \times x^2 - 2 \times (-6\,x) - 2 \times 9 + 72 \\
&= -2\,x^2 + 12\,x - 18 + 72 \\
&= -2\,x^2 + 12\,x + 54 \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

►2. Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.

a) En prenant la forme factorisée, l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $-2(x+3)(x-9) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned} x+3 &= 0 \text{ ou } x-9=0 \\ x &= -3 \text{ ou } x = 9 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : -3 et 9.

b) $f(x) = 54$ On remarque que la forme développée contient la constante 54 : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned} f(x) &= 54 \\ -2x^2 + 12x + 54 &= 54 \\ -2x^2 + 12x + 54 - 54 &= 54 - 54 \\ -2x^2 + 12x &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par x, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned} -2x^2 + 12x &= 0 \\ -2x \times x + 12 \times x &= 0 \\ x(-2x+12) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x = 0 \text{ ou } -2x + 12 = 0 \\ &x = 0 \text{ ou } -2x = -12 \\ &x = 0 \text{ ou } x = \frac{-12}{-2} \\ &x = 0 \text{ ou } x = 6 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = 6$.

c) $f(x) = 72$ On remarque que la forme canonique contient la constante 72 : en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f(x) &= 72 \\ -2(x-3)^2 + 72 &= 72 \\ -2(x-3)^2 + 72 - 72 &= 72 - 72 \\ -2(x-3)^2 &= 0 \\ (x-3)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x - 3 &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = 3$.

►3. **a)** *Dresser le tableau de variations de f.* Dans la forme développée, le coefficient devant le x^2 est négatif , donc la fonction est croissante puis décroissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{12}{2\times(-2)}$, soit 3, et $f(3) = -2 \times 3^2 + 12 \times 3 + 54 = 72$. Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	72	$\searrow$	

b) *Dresser le tableau de signes de f.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f(x) = -2(x+3)(x-9)$.

- Le premier facteur $x+3$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 3$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{3}{1} = -3$.
- Le second facteur $x-9$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = -9$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-9}{1} = 9$.

x	$-\infty$		-3		9		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$	
$x + 3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 9$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) = -2(x+3)(x-9)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

►4. Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

a) *Résoudre $f(x) \geqslant 0$.* En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que f est positive sur l'intervalle central . Les solutions sont donc :

$x \in [-3 ; 9]$

b) *Quel est l'extremum de f ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus grande valeur prise par f est 72. Le maximum de f est donc 72, et il est atteint pour $x = 3$.