## Corrigé de l'exercice 1

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto 2\,x^2 + 4\,x - 16$.

**►1.** **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} 2\,(x+4)\,(x-2) &= 2\,(x \times x + 4 \times x - 2 \times x + 4 \times (-2)) \\ &= 2\,\left(x^2 + 2\,x - 8\right) \\ &= 2 \times x^2 + 2 \times 2\,x + 2 \times (-8) \\ &= 2\,x^2 + 4\,x - 16 \\ &= f\,(x) \end{aligned}$$

**b)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} 2\,(x+1)^2 - 18 &= 2\,\left(x^2 + 2 \times 1 \times x + 1^2\right) - 18 \\ &= 2\,\left(x^2 + 2\,x + 1\right) - 18 \\ &= 2 \times x^2 + 2 \times 2\,x + 2 \times 1 - 18 \\ &= 2\,x^2 + 4\,x + 2 - 18 \\ &= 2\,x^2 + 4\,x - 16 \\ &= f\,(x) \end{aligned}$$

**►2.** Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de $f$.

**a)** En prenant la forme factorisée, l'équation $f\,(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $2\,(x+4)\,(x-2) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned} x + 4 = 0 &\text{ ou } x - 2 = 0 \\ x = -4 &\text{ ou } x = 2 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $-4$ et $2$.

**b)** $f\,(x) = -16$ On remarque que la forme développée contient la constante $-16$ : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned} f\,(x) &= -16 \\ 2\,x^2 + 4\,x - 16 &= -16 \\ 2\,x^2 + 4\,x - 16 + 16 &= -16 + 16 \\ 2\,x^2 + 4\,x &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par $x$, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned} 2\,x^2 + 4\,x &= 0 \\ 2\,x \times x + 4 \times x &= 0 \\ x\,(2\,x + 4) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x = 0 \text{ ou } 2\,x + 4 = 0 \\ &x = 0 \text{ ou } 2\,x = -4 \\ &x = 0 \text{ ou } x = \frac{-4}{2} \\ &x = 0 \text{ ou } x = -2 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = -2$.

**c)** $f(x) = -18$ On remarque que la forme canonique contient la constante $-18$ : en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f(x) &= -18 \\ 2\,(x+1)^2 - 18 &= -18 \\ 2\,(x+1)^2 - 18 + 18 &= -18 + 18 \\ 2\,(x+1)^2 &= 0 \\ (x+1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x + 1 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = -1$.

**▶3.** **a)** *Dresser le tableau de variations de $f$.* Dans la forme développée, le coefficient devant le $x^2$ est positif , donc la fonction est décroissante puis croissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{4}{2\times2}$, soit $-1$, et $f(-1) = 2 \times (-1)^2 + 4 \times (-1) - 16 = -18$. Le tableau de variations est donc :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $-18$ | $\nearrow$ | |

**b)** *Dresser le tableau de signes de $f$.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f(x) = 2\,(x+4)\,(x-2)$.

- Le premier facteur $x+4$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 4$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{4}{1} = -4$.
- Le second facteur $x-2$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = -2$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-2}{1} = 2$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x+4$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x-2$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x) = 2\,(x+4)\,(x-2)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

**▶4.** Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

**a)** *Résoudre $f(x) \geqslant 0$.* En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que $f$ est positive sur les premier et dernier intervalles . Les solutions sont donc :

$x \in \left]-\infty\,;\,-4\right] \cup \left[2\,;\,+\infty\right[$

**b)** *Quel est l'extremum de $f$ ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de $x$ est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus petite valeur prise par $f$ est $-18$. Le minimum de $f$ est donc $-18$, et il est atteint pour $x = -1$.

## Corrigé de l'exercice 2

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto -0{,}5\,x^2 + 7{,}5\,x - 13$.

▶**1.** **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
-0{,}5\ (x-13)\ (x-2) &= -0{,}5\ (x \times x - 13 \times x - 2 \times x - 13 \times\ (-2)) \\
&= -0{,}5\ \left(x^2 - 15\,x + 26\right) \\
&= -0{,}5 \times x^2 - 0{,}5 \times\ (-15\,x) - 0{,}5 \times 26 \\
&= -0{,}5\,x^2 + 7{,}5\,x - 13 \\
&= f\,(x)
\end{aligned}$$

**b)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
-0{,}5\ (x-7{,}5)^2 + 15{,}125 &= -0{,}5\ \left(x^2 - 2 \times 7{,}5 \times x + 7{,}5^2\right) + 15{,}125 \\
&= -0{,}5\ \left(x^2 - 15\,x + 56{,}25\right) + 15{,}125 \\
&= -0{,}5 \times x^2 - 0{,}5 \times\ (-15\,x) - 0{,}5 \times 56{,}25 + 15{,}125 \\
&= -0{,}5\,x^2 + 7{,}5\,x - 28{,}125 + 15{,}125 \\
&= -0{,}5\,x^2 + 7{,}5\,x - 13 \\
&= f\,(x)
\end{aligned}$$

▶**2.** Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de $f$.

**a)** En prenant la forme factorisée, l'équation $f\,(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $-0{,}5\,(x-13)\,(x-2) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned}
x - 13 = 0 \text{ ou } x - 2 = 0 \\
x = 13 \text{ ou } x = 2
\end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : 13 et 2.

**b)** $f\,(x) = -13$ On remarque que la forme développée contient la constante $-13$ : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned}
f\,(x) &= -13 \\
-0{,}5\,x^2 + 7{,}5\,x - 13 &= -13 \\
-0{,}5\,x^2 + 7{,}5\,x - 13 + 13 &= -13 + 13 \\
-0{,}5\,x^2 + 7{,}5\,x &= 0
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par $x$, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned}
-0{,}5\,x^2 + 7{,}5\,x &= 0 \\
-0{,}5\,x \times x + 7{,}5 \times x &= 0 \\
x\ (-0{,}5\,x + 7{,}5) &= 0
\end{aligned}$$

$x = 0$ ou $-0{,}5\,x + 7{,}5 = 0$
$x = 0$ ou $-0{,}5\,x = -7{,}5$
$x = 0$ ou $x = \dfrac{-7{,}5}{-0{,}5}$
$x = 0$ ou $x = 15$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = 15$.

**c)** $f\,(x) = 15{,}125$ On remarque que la forme canonique contient la constante 15,125 : en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f\,(x) &= 15{,}125 \\ -0{,}5\,(x-7{,}5)^2 + 15{,}125 &= 15{,}125 \\ -0{,}5\,(x-7{,}5)^2 + 15{,}125 - 15{,}125 &= 15{,}125 - 15{,}125 \\ -0{,}5\,(x-7{,}5)^2 &= 0 \\ (x-7{,}5)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$x - 7{,}5 = 0$
$x = 7{,}5$

Il y a donc une unique solution $x = 7{,}5$.

**►3.** **a)** *Dresser le tableau de variations de $f$.* Dans la forme développée, le coefficient devant le $x^2$ est négatif , donc la fonction est croissante puis décroissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{7{,}5}{2\times(-0{,}5)}$, soit 7,5, et $f\,(7{,}5) = -0{,}5 \times 7{,}5^2 + 7{,}5 \times 7{,}5 - 13 = 15{,}125$. Le tableau de variations est donc :

| $x$ | $-\infty$ | $7{,}5$ | $+\infty$ |
| --- | --- | --- | --- |
| $f\,(x)$ | $\nearrow$ | $15{,}125$ | $\searrow$ |

**b)** *Dresser le tableau de signes de $f$.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f\,(x) = -0{,}5\,(x-13)\,(x-2)$.

- Le premier facteur $x - 13$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = -13$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-13}{1} = 13$.
- Le second facteur $x - 2$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = -2$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-2}{1} = 2$.

| $x$ | $-\infty$ | | 2 | | 13 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-0{,}5$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | |
| $x - 13$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $x - 2$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $f(x) = -0{,}5\ (x-13)\ (x-2)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

**▶4.** Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

**a)** *Résoudre* $f(x) \geqslant 0$. En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que $f$ est positive sur l'intervalle central . Les solutions sont donc :

$x \in [2\,;\,13]$

**b)** *Quel est l'extremum de $f$ ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de $x$ est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus grande valeur prise par $f$ est 15,125. Le maximum de $f$ est donc 15,125, et il est atteint pour $x = 7{,}5$.

## Corrigé de l'exercice 3

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto -0{,}5\,x^2 - 2\,x + 70$.

**▶1.** **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
-0{,}5\ (x-10)\ (x+14) &= -0{,}5\ (x \times x - 10 \times x + 14 \times x - 10 \times 14) \\
&= -0{,}5\ \left(x^2 + 4\,x - 140\right) \\
&= -0{,}5 \times x^2 - 0{,}5 \times 4\,x - 0{,}5 \times\ (-140) \\
&= -0{,}5\,x^2 - 2\,x + 70 \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

**b)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
-0{,}5\ (x+2)^2 + 72 &= -0{,}5\ \left(x^2 + 2 \times 2 \times x + 2^2\right) + 72 \\
&= -0{,}5\ \left(x^2 + 4\,x + 4\right) + 72 \\
&= -0{,}5 \times x^2 - 0{,}5 \times 4\,x - 0{,}5 \times 4 + 72 \\
&= -0{,}5\,x^2 - 2\,x - 2 + 72 \\
&= -0{,}5\,x^2 - 2\,x + 70 \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

**▶2.** Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de $f$.

**a)** En prenant la forme factorisée, l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $-0{,}5\,(x-10)\,(x+14) = 0$. Donc :

$x - 10 = 0$ ou $x + 14 = 0$
$x = 10$ ou $x = -14$

Il y a donc deux solutions : 10 et $-14$.

**b)** $f(x) = 70$ On remarque que la forme développée contient la constante 70 : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned} f(x) &= 70 \\ -0{,}5\,x^2 - 2\,x + 70 &= 70 \\ -0{,}5\,x^2 - 2\,x + 70 - 70 &= 70 - 70 \\ -0{,}5\,x^2 - 2\,x &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par $x$, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned} -0{,}5\,x^2 - 2\,x &= 0 \\ -0{,}5\,x \times x - 2 \times x &= 0 \\ x\,(-0{,}5\,x - 2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x = 0 \text{ ou } -0{,}5\,x - 2 = 0 \\ &x = 0 \text{ ou } -0{,}5\,x = 2 \\ &x = 0 \text{ ou } x = \frac{2}{-0{,}5} \\ &x = 0 \text{ ou } x = -4 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = -4$.

**c)** $f(x) = 72$ On remarque que la forme canonique contient la constante 72 : en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f(x) &= 72 \\ -0{,}5\,(x+2)^2 + 72 &= 72 \\ -0{,}5\,(x+2)^2 + 72 - 72 &= 72 - 72 \\ -0{,}5\,(x+2)^2 &= 0 \\ (x+2)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x + 2 &= 0 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = -2$.

**►3. a)** *Dresser le tableau de variations de $f$.* Dans la forme développée, le coefficient devant le $x^2$ est négatif , donc la fonction est croissante puis décroissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{-2}{2\times(-0{,}5)}$, soit $-2$, et $f(-2) = -0{,}5 \times (-2)^2 - 2 \times (-2) + 70 = 72$. Le tableau de variations est donc :

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $72$ | $\searrow$ |

**b)** *Dresser le tableau de signes de $f$.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f(x) = -0{,}5\,(x-10)\,(x+14)$.

- Le premier facteur $x-10$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = -10$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-10}{1} = 10$.
- Le second facteur $x+14$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 14$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{14}{1} = -14$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-14$ | | $10$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-0{,}5$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | |
| $x - 10$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x + 14$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f(x) = -0{,}5\,(x-10)\,(x+14)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

▶**4.** Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

**a)** *Résoudre $f(x) \geqslant 0$.* En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que $f$ est positive sur l'intervalle central . Les solutions sont donc :

$x \in [-14\,;\,10]$

**b)** *Quel est l'extremum de $f$ ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de $x$ est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus grande valeur prise par $f$ est 72. Le maximum de $f$ est donc 72, et il est atteint pour $x = -2$.

## Corrigé de l'exercice 4

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto -0{,}5\,x^2 + 6\,x - 13{,}5$.

▶**1.** **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
-0{,}5\,(x-9)\,(x-3) &= -0{,}5\,(x \times x - 9 \times x - 3 \times x - 9 \times (-3)) \\
&= -0{,}5\,\left(x^2 - 12\,x + 27\right) \\
&= -0{,}5 \times x^2 - 0{,}5 \times (-12\,x) - 0{,}5 \times 27 \\
&= -0{,}5\,x^2 + 6\,x - 13{,}5 \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

**b)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
-0{,}5\,(x-6)^2 + 4{,}5 &= -0{,}5\,\left(x^2 - 2 \times 6 \times x + 6^2\right) + 4{,}5 \\
&= -0{,}5\,\left(x^2 - 12\,x + 36\right) + 4{,}5 \\
&= -0{,}5 \times x^2 - 0{,}5 \times (-12\,x) - 0{,}5 \times 36 + 4{,}5 \\
&= -0{,}5\,x^2 + 6\,x - 18 + 4{,}5 \\
&= -0{,}5\,x^2 + 6\,x - 13{,}5 \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

►**2.** Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de $f$.

**a)** En prenant la forme factorisée, l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $-0{,}5\,(x-9)\,(x-3) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned} x - 9 = 0 &\text{ ou } x - 3 = 0 \\ x = 9 &\text{ ou } x = 3 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : 9 et 3.

**b)** $f(x) = -13{,}5$ On remarque que la forme développée contient la constante $-13{,}5$ : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned} f(x) &= -13{,}5 \\ -0{,}5\,x^2 + 6\,x - 13{,}5 &= -13{,}5 \\ -0{,}5\,x^2 + 6\,x - 13{,}5 + 13{,}5 &= -13{,}5 + 13{,}5 \\ -0{,}5\,x^2 + 6\,x &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par $x$, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned} -0{,}5\,x^2 + 6\,x &= 0 \\ -0{,}5\,x \times x + 6 \times x &= 0 \\ x\,(-0{,}5\,x + 6) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x = 0 \text{ ou } -0{,}5\,x + 6 = 0 \\ &x = 0 \text{ ou } -0{,}5\,x = -6 \\ &x = 0 \text{ ou } x = \frac{-6}{-0{,}5} \\ &x = 0 \text{ ou } x = 12 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = 12$.

**c)** $f(x) = 4{,}5$ On remarque que la forme canonique contient la constante $4{,}5$ : en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f(x) &= 4{,}5 \\ -0{,}5\,(x-6)^2 + 4{,}5 &= 4{,}5 \\ -0{,}5\,(x-6)^2 + 4{,}5 - 4{,}5 &= 4{,}5 - 4{,}5 \\ -0{,}5\,(x-6)^2 &= 0 \\ (x-6)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x - 6 &= 0 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = 6$.

**►3.** **a)** *Dresser le tableau de variations de $f$.* Dans la forme développée, le coefficient devant le $x^2$ est négatif , donc la fonction est croissante puis décroissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{6}{2\times(-0{,}5)}$, soit 6, et $f(6) = -0{,}5 \times 6^2 + 6 \times 6 - 13{,}5 = 4{,}5$. Le tableau de variations est donc :

| $x$ | $-\infty$ | 6 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\nearrow$ | 4,5 | $\searrow$ |

**b)** *Dresser le tableau de signes de $f$.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f(x) = -0{,}5\,(x-9)\,(x-3)$.

- Le premier facteur $x - 9$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = -9$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-9}{1} = 9$.
- Le second facteur $x - 3$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = -3$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-3}{1} = 3$.

| $x$ | $-\infty$ | | 3 | | 9 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-0{,}5$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | |
| $x - 9$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $x - 3$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $f(x) = -0{,}5\,(x-9)\,(x-3)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

**►4.** Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

**a)** *Résoudre $f(x) \geqslant 0$.* En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que $f$ est positive sur l'intervalle central . Les solutions sont donc :

$x \in [3\,;\,9]$

**b)** *Quel est l'extremum de $f$ ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de $x$ est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus grande valeur prise par $f$ est 4,5. Le maximum de $f$ est donc 4,5, et il est atteint pour $x = 6$.