Corrigé de l'exercice 1

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto -0{,}5\,x^2 + 10{,}5\,x - 54$.

►1. **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
-0{,}5\,(x-12)\,(x-9) &= -0{,}5\,(x \times x - 12 \times x - 9 \times x - 12 \times (-9)) \\
&= -0{,}5\,\left(x^2 - 21\,x + 108\right) \\
&= -0{,}5 \times x^2 - 0{,}5 \times (-21\,x) - 0{,}5 \times 108 \\
&= -0{,}5\,x^2 + 10{,}5\,x - 54 \\
&= f\,(x)
\end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
-0{,}5\,(x-10{,}5)^2 + 1{,}125 &= -0{,}5\,\left(x^2 - 2 \times 10{,}5 \times x + 10{,}5^2\right) + 1{,}125 \\
&= -0{,}5\,\left(x^2 - 21\,x + 110{,}25\right) + 1{,}125 \\
&= -0{,}5 \times x^2 - 0{,}5 \times (-21\,x) - 0{,}5 \times 110{,}25 + 1{,}125 \\
&= -0{,}5\,x^2 + 10{,}5\,x - 55{,}125 + 1{,}125 \\
&= -0{,}5\,x^2 + 10{,}5\,x - 54 \\
&= f\,(x)
\end{aligned}$$

►2. Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.

a) En prenant la forme factorisée, l'équation $f\,(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $-0{,}5\,(x-12)\,(x-9) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned}
x - 12 = 0 &\text{ ou } x - 9 = 0 \\
x = 12 &\text{ ou } x = 9
\end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : 12 et 9.

b) $f\,(x) = -54$ On remarque que la forme développée contient la constante -54 : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned}
f\,(x) &= -54 \\
-0{,}5\,x^2 + 10{,}5\,x - 54 &= -54 \\
-0{,}5\,x^2 + 10{,}5\,x - 54 + 54 &= -54 + 54 \\
-0{,}5\,x^2 + 10{,}5\,x &= 0
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par x, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned}
-0{,}5\,x^2 + 10{,}5\,x &= 0 \\
-0{,}5\,x \times x + 10{,}5 \times x &= 0 \\
x\,(-0{,}5\,x + 10{,}5) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x = 0 \text{ ou } -0{,}5\,x + 10{,}5 = 0 \\
&x = 0 \text{ ou } -0{,}5\,x = -10{,}5 \\
&x = 0 \text{ ou } x = \frac{-10{,}5}{-0{,}5} \\
&x = 0 \text{ ou } x = 21
\end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = 21$.

c) $f(x) = 1{,}125$ On remarque que la forme canonique contient la constante 1,125 : en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f(x) &= 1{,}125 \\ -0{,}5\,(x-10{,}5)^2 + 1{,}125 &= 1{,}125 \\ -0{,}5\,(x-10{,}5)^2 + 1{,}125 - 1{,}125 &= 1{,}125 - 1{,}125 \\ -0{,}5\,(x-10{,}5)^2 &= 0 \\ (x-10{,}5)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x - 10{,}5 &= 0 \\ x &= 10{,}5 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = 10{,}5$.

▶3. **a)** *Dresser le tableau de variations de f.* Dans la forme développée, le coefficient devant le x^2 est négatif , donc la fonction est croissante puis décroissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{10{,}5}{2\times(-0{,}5)}$, soit 10,5, et $f(10{,}5) = -0{,}5\times 10{,}5^2 + 10{,}5\times 10{,}5 - 54 = 1{,}125$. Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$		$10{,}5$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$1{,}125$	$\searrow$	

b) *Dresser le tableau de signes de f.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f(x) = -0{,}5\,(x-12)\,(x-9)$.

- Le premier facteur $x - 12$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = -12$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-12}{1} = 12$.
- Le second facteur $x - 9$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = -9$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-9}{1} = 9$.

x	$-\infty$		9		12		$+\infty$
$-0{,}5$		$-$		$-$		$-$	
$x - 12$		$-$		$-$	0	$+$	
$x - 9$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x) = -0{,}5\,(x-12)\,(x-9)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

▶4. Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

a) *Résoudre $f(x) \geqslant 0$.* En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que f est positive sur l'intervalle central . Les solutions sont donc :

$x \in [9\,;\,12]$

b) *Quel est l'extremum de f ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus grande valeur prise par f est 1,125. Le maximum de f est donc 1,125, et il est atteint pour $x = 10{,}5$.

Corrigé de l'exercice 2

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto 2\,x^2 + 48\,x + 280$.

►1. **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
2\,(x+10)\,(x+14) &= 2\,(x \times x + 10 \times x + 14 \times x + 10 \times 14)\\
&= 2\,\left(x^2 + 24\,x + 140\right)\\
&= 2 \times x^2 + 2 \times 24\,x + 2 \times 140\\
&= 2\,x^2 + 48\,x + 280\\
&= f\,(x)
\end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
2\,(x+12)^2 - 8 &= 2\,\left(x^2 + 2 \times 12 \times x + 12^2\right) - 8\\
&= 2\,\left(x^2 + 24\,x + 144\right) - 8\\
&= 2 \times x^2 + 2 \times 24\,x + 2 \times 144 - 8\\
&= 2\,x^2 + 48\,x + 288 - 8\\
&= 2\,x^2 + 48\,x + 280\\
&= f\,(x)
\end{aligned}$$

►2. Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.

a) En prenant la forme factorisée, l'équation $f\,(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $2\,(x+10)\,(x+14) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned}
x + 10 = 0 &\text{ ou } x + 14 = 0\\
x = -10 &\text{ ou } x = -14
\end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : -10 et -14.

b) $f\,(x) = 280$ On remarque que la forme développée contient la constante 280 : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned}
f\,(x) &= 280\\
2\,x^2 + 48\,x + 280 &= 280\\
2\,x^2 + 48\,x + 280 - 280 &= 280 - 280\\
2\,x^2 + 48\,x &= 0
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par x, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned}
2\,x^2 + 48\,x &= 0\\
2\,x \times x + 48 \times x &= 0\\
x\,(2\,x + 48) &= 0
\end{aligned}$$

$x = 0$ ou $2\,x + 48 = 0$

$x = 0$ ou $2\,x = -48$

$x = 0$ ou $x = \dfrac{-48}{2}$

$x = 0$ ou $x = -24$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = -24$.

c) $f\,(x) = -8$ On remarque que la forme canonique contient la constante -8 : en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f\,(x) &= -8 \\ 2\,(x+12)^2 - 8 &= -8 \\ 2\,(x+12)^2 - 8 + 8 &= -8 + 8 \\ 2\,(x+12)^2 &= 0 \\ (x+12)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x + 12 &= 0 \\ x &= -12 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = -12$.

▶3. **a)** *Dresser le tableau de variations de f.* Dans la forme développée, le coefficient devant le x^2 est positif , donc la fonction est décroissante puis croissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{48}{2\times 2}$, soit -12, et $f\,(-12) = 2 \times\, (-12)^2 + 48 \times\, (-12) + 280 = -8$. Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$	-12	$+\infty$
$f\,(x)$	↘	-8	↗

b) *Dresser le tableau de signes de f.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f\,(x) = 2\,(x+10)\,(x+14)$.

- Le premier facteur $x + 10$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 10$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{10}{1} = -10$.
- Le second facteur $x + 14$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 14$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{14}{1} = -14$.

x	$-\infty$		-14		-10		$+\infty$
2		$+$		$+$		$+$	
$x + 10$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 14$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x) = 2\,(x+10)\,(x+14)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

▶**4.** Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

a) *Résoudre* $f(x) \geqslant 0$. En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que f est positive sur les premier et dernier intervalles . Les solutions sont donc :

$x \in \left]-\infty\,;\,-14\right] \cup \left[-10\,;\,+\infty\right[$

b) *Quel est l'extremum de f ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus petite valeur prise par f est -8. Le minimum de f est donc -8, et il est atteint pour $x = -12$.

Corrigé de l'exercice 3

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto -0{,}5\,x^2 - 4\,x + 42$.

▶**1.** **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} -0{,}5\,(x+14)\,(x-6) &= -0{,}5\,(x \times x + 14 \times x - 6 \times x + 14 \times (-6)) \\ &= -0{,}5\,\left(x^2 + 8\,x - 84\right) \\ &= -0{,}5 \times x^2 - 0{,}5 \times 8\,x - 0{,}5 \times (-84) \\ &= -0{,}5\,x^2 - 4\,x + 42 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} -0{,}5\,(x+4)^2 + 50 &= -0{,}5\,\left(x^2 + 2 \times 4 \times x + 4^2\right) + 50 \\ &= -0{,}5\,\left(x^2 + 8\,x + 16\right) + 50 \\ &= -0{,}5 \times x^2 - 0{,}5 \times 8\,x - 0{,}5 \times 16 + 50 \\ &= -0{,}5\,x^2 - 4\,x - 8 + 50 \\ &= -0{,}5\,x^2 - 4\,x + 42 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

▶**2.** Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.

a) En prenant la forme factorisée, l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $-0{,}5\,(x+14)\,(x-6) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned} x + 14 = 0 &\text{ ou } x - 6 = 0 \\ x = -14 &\text{ ou } x = 6 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : -14 et 6.

b) $f(x) = 42$ On remarque que la forme développée contient la constante 42 : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned} f(x) &= 42 \\ -0{,}5\,x^2 - 4\,x + 42 &= 42 \\ -0{,}5\,x^2 - 4\,x + 42 - 42 &= 42 - 42 \\ -0{,}5\,x^2 - 4\,x &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par x, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned} -0{,}5\,x^2 - 4\,x &= 0 \\ -0{,}5\,x \times x - 4 \times x &= 0 \\ x\,(-0{,}5\,x - 4) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x = 0 \text{ ou } -0{,}5\,x - 4 = 0 \\ &x = 0 \text{ ou } -0{,}5\,x = 4 \\ &x = 0 \text{ ou } x = \frac{4}{-0{,}5} \\ &x = 0 \text{ ou } x = -8 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = -8$.

c) $f(x) = 50$ On remarque que la forme canonique contient la constante 50 : en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f(x) &= 50 \\ -0{,}5\,(x+4)^2 + 50 &= 50 \\ -0{,}5\,(x+4)^2 + 50 - 50 &= 50 - 50 \\ -0{,}5\,(x+4)^2 &= 0 \\ (x+4)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x + 4 &= 0 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = -4$.

►3. a) *Dresser le tableau de variations de f.* Dans la forme développée, le coefficient devant le x^2 est négatif , donc la fonction est croissante puis décroissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{-4}{2\times(-0{,}5)}$, soit -4, et $f(-4) = -0{,}5 \times (-4)^2 - 4 \times (-4) + 42 = 50$. Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	50	$\searrow$	

b) *Dresser le tableau de signes de f.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f(x) = -0{,}5\ (x+14)\ (x-6)$.

- Le premier facteur $x + 14$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 14$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{14}{1} = -14$.
- Le second facteur $x - 6$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = -6$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-6}{1} = 6$.

x	$-\infty$		-14		6		$+\infty$
$-0{,}5$		$-$		$-$		$-$	
$x + 14$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 6$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) = -0{,}5\ (x+14)\ (x-6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

▶4. Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

a) *Résoudre $f(x) \geqslant 0$.* En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que f est positive sur l'intervalle central . Les solutions sont donc :

$x \in [-14\,;\,6]$

b) *Quel est l'extremum de f ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus grande valeur prise par f est 50. Le maximum de f est donc 50, et il est atteint pour $x = -4$.

Corrigé de l'exercice 4

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto -0{,}5\,x^2 - 2{,}5\,x + 42$.

▶1. a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
-0{,}5\ (x+12)\ (x-7) &= -0{,}5\ (x \times x + 12 \times x - 7 \times x + 12 \times\ (-7)) \\
&= -0{,}5\ \left(x^2 + 5\,x - 84\right) \\
&= -0{,}5 \times x^2 - 0{,}5 \times 5\,x - 0{,}5 \times\ (-84) \\
&= -0{,}5\,x^2 - 2{,}5\,x + 42 \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
-0{,}5\ (x+2{,}5)^2 + 45{,}125 &= -0{,}5\ \left(x^2 + 2 \times 2{,}5 \times x + 2{,}5^2\right) + 45{,}125 \\
&= -0{,}5\ \left(x^2 + 5\,x + 6{,}25\right) + 45{,}125 \\
&= -0{,}5 \times x^2 - 0{,}5 \times 5\,x - 0{,}5 \times 6{,}25 + 45{,}125 \\
&= -0{,}5\,x^2 - 2{,}5\,x - 3{,}125 + 45{,}125 \\
&= -0{,}5\,x^2 - 2{,}5\,x + 42 \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

►**2.** Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.

a) En prenant la forme factorisée, l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $-0{,}5\,(x+12)\,(x-7) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned} x+12 = 0 &\text{ ou } x-7=0 \\ x = -12 &\text{ ou } x = 7 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : -12 et 7.

b) $f(x) = 42$ On remarque que la forme développée contient la constante 42 : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned} f(x) &= 42 \\ -0{,}5\,x^2 - 2{,}5\,x + 42 &= 42 \\ -0{,}5\,x^2 - 2{,}5\,x + 42 - 42 &= 42 - 42 \\ -0{,}5\,x^2 - 2{,}5\,x &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par x, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned} -0{,}5\,x^2 - 2{,}5\,x &= 0 \\ -0{,}5\,x \times x - 2{,}5 \times x &= 0 \\ x\,(-0{,}5\,x - 2{,}5) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x = 0 \text{ ou } -0{,}5\,x - 2{,}5 = 0 \\ &x = 0 \text{ ou } -0{,}5\,x = 2{,}5 \\ &x = 0 \text{ ou } x = \frac{2{,}5}{-0{,}5} \\ &x = 0 \text{ ou } x = -5 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = -5$.

c) $f(x) = 45{,}125$ On remarque que la forme canonique contient la constante 45,125 : en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f(x) &= 45{,}125 \\ -0{,}5\,(x+2{,}5)^2 + 45{,}125 &= 45{,}125 \\ -0{,}5\,(x+2{,}5)^2 + 45{,}125 - 45{,}125 &= 45{,}125 - 45{,}125 \\ -0{,}5\,(x+2{,}5)^2 &= 0 \\ (x+2{,}5)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x + 2{,}5 &= 0 \\ x &= -2{,}5 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = -2{,}5$.

►3. **a)** *Dresser le tableau de variations de f.* Dans la forme développée, le coefficient devant le x^2 est négatif , donc la fonction est croissante puis décroissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{-2{,}5}{2\times(-0{,}5)}$, soit $-2{,}5$, et $f(-2{,}5) = -0{,}5 \times (-2{,}5)^2 - 2{,}5 \times (-2{,}5) + 42 = 45{,}125$. Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$	$-2{,}5$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$45{,}125$	↘

b) *Dresser le tableau de signes de f.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f(x) = -0{,}5\,(x+12)\,(x-7)$.

- Le premier facteur $x+12$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 12$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{12}{1} = -12$.
- Le second facteur $x-7$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = -7$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-7}{1} = 7$.

x	$-\infty$		-12		7		$+\infty$
$-0{,}5$		$-$		$-$		$-$	
$x + 12$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 7$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) = -0{,}5\,(x+12)\,(x-7)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

►4. Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

a) *Résoudre $f(x) \geqslant 0$.* En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que f est positive sur l'intervalle central . Les solutions sont donc :

$x \in [-12\,;\,7]$

b) *Quel est l'extremum de f ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus grande valeur prise par f est $45{,}125$. Le maximum de f est donc $45{,}125$, et il est atteint pour $x = -2{,}5$.