Corrigé de l'exercice 1

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto -0{,}5\,x^2 + 9\,x - 40$.

►1. **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
-0{,}5\ (x-10)\ (x-8) &= -0{,}5\ (x \times x - 10 \times x - 8 \times x - 10 \times (-8)) \\
&= -0{,}5\ \left(x^2 - 18\,x + 80\right) \\
&= -0{,}5 \times x^2 - 0{,}5 \times (-18\,x) - 0{,}5 \times 80 \\
&= -0{,}5\,x^2 + 9\,x - 40 \\
&= f\,(x)
\end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
-0{,}5\ (x-9)^2 + 0{,}5 &= -0{,}5\ \left(x^2 - 2 \times 9 \times x + 9^2\right) + 0{,}5 \\
&= -0{,}5\ \left(x^2 - 18\,x + 81\right) + 0{,}5 \\
&= -0{,}5 \times x^2 - 0{,}5 \times (-18\,x) - 0{,}5 \times 81 + 0{,}5 \\
&= -0{,}5\,x^2 + 9\,x - 40{,}5 + 0{,}5 \\
&= -0{,}5\,x^2 + 9\,x - 40 \\
&= f\,(x)
\end{aligned}$$

►2. Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.

a) En prenant la forme factorisée, l'équation $f\,(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $-0{,}5\,(x-10)\,(x-8) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned}
x - 10 = 0 &\text{ ou } x - 8 = 0 \\
x = 10 &\text{ ou } x = 8
\end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : 10 et 8.

b) $f\,(x) = -40$ On remarque que la forme développée contient la constante -40 : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned}
f\,(x) &= -40 \\
-0{,}5\,x^2 + 9\,x - 40 &= -40 \\
-0{,}5\,x^2 + 9\,x - 40 + 40 &= -40 + 40 \\
-0{,}5\,x^2 + 9\,x &= 0
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par x, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned}
-0{,}5\,x^2 + 9\,x &= 0 \\
-0{,}5\,x \times x + 9 \times x &= 0 \\
x\ (-0{,}5\,x + 9) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x = 0 \text{ ou } -0{,}5\,x + 9 = 0 \\
&x = 0 \text{ ou } -0{,}5\,x = -9 \\
&x = 0 \text{ ou } x = \frac{-9}{-0{,}5} \\
&x = 0 \text{ ou } x = 18
\end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = 18$.

c) $f(x) = 0{,}5$ On remarque que la forme canonique contient la constante 0,5 : en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0{,}5 \\ -0{,}5\,(x-9)^2 + 0{,}5 &= 0{,}5 \\ -0{,}5\,(x-9)^2 + 0{,}5 - 0{,}5 &= 0{,}5 - 0{,}5 \\ -0{,}5\,(x-9)^2 &= 0 \\ (x-9)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x - 9 &= 0 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = 9$.

▶3. a) *Dresser le tableau de variations de f.* Dans la forme développée, le coefficient devant le x^2 est négatif , donc la fonction est croissante puis décroissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{9}{2\times(-0{,}5)}$, soit 9, et $f(9) = -0{,}5 \times 9^2 + 9 \times 9 - 40 = 0{,}5$. Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$		9		$+\infty$
$f(x)$		↗	$0{,}5$	↘	

b) *Dresser le tableau de signes de f.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f(x) = -0{,}5\,(x-10)\,(x-8)$.

- Le premier facteur $x - 10$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = -10$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-10}{1} = 10$.
- Le second facteur $x - 8$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = -8$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-8}{1} = 8$.

x	$-\infty$		8		10		$+\infty$
$-0{,}5$		$-$		$-$		$-$	
$x - 10$		$-$		$-$	0	$+$	
$x - 8$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x) = -0{,}5\,(x-10)\,(x-8)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

▶4. Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

a) *Résoudre $f(x) \geqslant 0$.* En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que f est positive sur l'intervalle central . Les solutions sont donc :

$x \in [8\,;\,10]$

b) *Quel est l'extremum de f ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus grande valeur prise par f est 0,5. Le maximum de f est donc 0,5, et il est atteint pour $x = 9$.

Corrigé de l'exercice 2

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto 0{,}5\,x^2 + 2{,}5\,x - 52$.

▶1. **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} 0{,}5\ (x+13)\ (x-8) &= 0{,}5\ (x \times x + 13 \times x - 8 \times x + 13 \times\ (-8)) \\ &= 0{,}5\ \left(x^2 + 5\,x - 104\right) \\ &= 0{,}5 \times x^2 + 0{,}5 \times 5\,x + 0{,}5 \times\ (-104) \\ &= 0{,}5\,x^2 + 2{,}5\,x - 52 \\ &= f\ (x) \end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} 0{,}5\ (x+2{,}5)^2 - 55{,}125 &= 0{,}5\ \left(x^2 + 2 \times 2{,}5 \times x + 2{,}5^2\right) - 55{,}125 \\ &= 0{,}5\ \left(x^2 + 5\,x + 6{,}25\right) - 55{,}125 \\ &= 0{,}5 \times x^2 + 0{,}5 \times 5\,x + 0{,}5 \times 6{,}25 - 55{,}125 \\ &= 0{,}5\,x^2 + 2{,}5\,x + 3{,}125 - 55{,}125 \\ &= 0{,}5\,x^2 + 2{,}5\,x - 52 \\ &= f\ (x) \end{aligned}$$

▶2. Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.

a) En prenant la forme factorisée, l'équation $f\,(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $0{,}5\,(x+13)\,(x-8) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned} x + 13 = 0 &\text{ ou } x - 8 = 0 \\ x = -13 &\text{ ou } x = 8 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : -13 et 8.

b) $f\,(x) = -52$ On remarque que la forme développée contient la constante -52 : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned} f\ (x) &= -52 \\ 0{,}5\,x^2 + 2{,}5\,x - 52 &= -52 \\ 0{,}5\,x^2 + 2{,}5\,x - 52 + 52 &= -52 + 52 \\ 0{,}5\,x^2 + 2{,}5\,x &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par x, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned} 0{,}5\,x^2 + 2{,}5\,x &= 0 \\ 0{,}5\,x \times x + 2{,}5 \times x &= 0 \\ x\ (0{,}5\,x + 2{,}5) &= 0 \end{aligned}$$

$x = 0$ ou $0{,}5\,x + 2{,}5 = 0$
$x = 0$ ou $0{,}5\,x = -2{,}5$
$x = 0$ ou $x = \dfrac{-2{,}5}{0{,}5}$
$x = 0$ ou $x = -5$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = -5$.

c) $f(x) = -55{,}125$ On remarque que la forme canonique contient la constante $-55{,}125$: en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f(x) &= -55{,}125 \\ 0{,}5\,(x+2{,}5)^2 - 55{,}125 &= -55{,}125 \\ 0{,}5\,(x+2{,}5)^2 - 55{,}125 + 55{,}125 &= -55{,}125 + 55{,}125 \\ 0{,}5\,(x+2{,}5)^2 &= 0 \\ (x+2{,}5)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x + 2{,}5 &= 0 \\ x &= -2{,}5 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = -2{,}5$.

▶3. a) *Dresser le tableau de variations de f.* Dans la forme développée, le coefficient devant le x^2 est positif , donc la fonction est décroissante puis croissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{2{,}5}{2\times 0{,}5}$, soit $-2{,}5$, et $f(-2{,}5) = 0{,}5 \times (-2{,}5)^2 + 2{,}5 \times (-2{,}5) - 52 = -55{,}125$. Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$		$-2{,}5$		$+\infty$
$f(x)$		↘	$-55{,}125$	↗	

b) *Dresser le tableau de signes de f.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f(x) = 0{,}5\,(x+13)\,(x-8)$.

- Le premier facteur $x + 13$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 13$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{13}{1} = -13$.
- Le second facteur $x - 8$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = -8$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-8}{1} = 8$.

x	$-\infty$		-13		8		$+\infty$
0,5		$+$		$+$		$+$	
$x + 13$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 8$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) = 0{,}5\ (x+13)\ (x-8)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

►4. Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

a) *Résoudre* $f(x) \geqslant 0$. En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que f est positive sur les premier et dernier intervalles . Les solutions sont donc :

$x \in]-\infty\,;\,-13] \cup [8\,;\,+\infty[$

b) *Quel est l'extremum de f ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus petite valeur prise par f est $-55{,}125$. Le minimum de f est donc $-55{,}125$, et il est atteint pour $x = -2{,}5$.

Corrigé de l'exercice 3

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto 2\,x^2 + 4\,x - 286$.

►1. **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} 2\ (x-11)\ (x+13) &= 2\ (x \times x - 11 \times x + 13 \times x - 11 \times 13) \\ &= 2\ \left(x^2 + 2\,x - 143\right) \\ &= 2 \times x^2 + 2 \times 2\,x + 2 \times\ (-143) \\ &= 2\,x^2 + 4\,x - 286 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} 2\ (x+1)^2 - 288 &= 2\ \left(x^2 + 2 \times 1 \times x + 1^2\right) - 288 \\ &= 2\ \left(x^2 + 2\,x + 1\right) - 288 \\ &= 2 \times x^2 + 2 \times 2\,x + 2 \times 1 - 288 \\ &= 2\,x^2 + 4\,x + 2 - 288 \\ &= 2\,x^2 + 4\,x - 286 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

►2. Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.

a) En prenant la forme factorisée, l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $2\,(x-11)\,(x+13) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned} x - 11 = 0 &\text{ ou } x + 13 = 0 \\ x = 11 &\text{ ou } x = -13 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : 11 et -13.

b) $f(x) = -286$ On remarque que la forme développée contient la constante -286 : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned} f(x) &= -286 \\ 2x^2 + 4x - 286 &= -286 \\ 2x^2 + 4x - 286 + 286 &= -286 + 286 \\ 2x^2 + 4x &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par x, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4x &= 0 \\ 2x \times x + 4 \times x &= 0 \\ x\,(2x + 4) &= 0 \end{aligned}$$

$x = 0$ ou $2x + 4 = 0$

$x = 0$ ou $2x = -4$

$x = 0$ ou $x = \dfrac{-4}{2}$

$x = 0$ ou $x = -2$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = -2$.

c) $f(x) = -288$ On remarque que la forme canonique contient la constante -288 : en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f(x) &= -288 \\ 2\,(x+1)^2 - 288 &= -288 \\ 2\,(x+1)^2 - 288 + 288 &= -288 + 288 \\ 2\,(x+1)^2 &= 0 \\ (x+1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x + 1 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = -1$.

►3. a) *Dresser le tableau de variations de f.* Dans la forme développée, le coefficient devant le x^2 est positif , donc la fonction est décroissante puis croissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{4}{2\times 2}$, soit -1, et $f(-1) = 2 \times (-1)^2 + 4 \times (-1) - 286 = -288$. Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	↘	-288	↗

b) *Dresser le tableau de signes de f.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f(x) = 2\,(x-11)\,(x+13)$.

- Le premier facteur $x - 11$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = -11$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-11}{1} = 11$.
- Le second facteur $x + 13$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 13$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{13}{1} = -13$.

x	$-\infty$		-13		11		$+\infty$
2		$+$		$+$		$+$	
$x - 11$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 13$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x) = 2\,(x-11)\,(x+13)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

▶4. Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

a) *Résoudre $f(x) \geqslant 0$.* En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que f est positive sur les premier et dernier intervalles . Les solutions sont donc :

$x \in \left]-\infty\,;\,-13\right] \cup \left[11\,;\,+\infty\right[$

b) *Quel est l'extremum de f ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus petite valeur prise par f est -288. Le minimum de f est donc -288, et il est atteint pour $x = -1$.

Corrigé de l'exercice 4

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto 2\,x^2 + 18\,x - 104$.

▶1. **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
2\,(x+13)\,(x-4) &= 2\,(x \times x + 13 \times x - 4 \times x + 13 \times (-4)) \\
&= 2\left(x^2 + 9\,x - 52\right) \\
&= 2 \times x^2 + 2 \times 9\,x + 2 \times (-52) \\
&= 2\,x^2 + 18\,x - 104 \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
2\,(x+4{,}5)^2 - 144{,}50 &= 2\left(x^2 + 2 \times 4{,}5 \times x + 4{,}5^2\right) - 144{,}50 \\
&= 2\left(x^2 + 9\,x + 20{,}25\right) - 144{,}50 \\
&= 2 \times x^2 + 2 \times 9\,x + 2 \times 20{,}25 - 144{,}50 \\
&= 2\,x^2 + 18\,x + 40{,}50 - 144{,}50 \\
&= 2\,x^2 + 18\,x - 104 \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

►2. Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.

a) En prenant la forme factorisée, l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $2(x+13)(x-4) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned} x+13 &= 0 \text{ ou } x-4=0 \\ x &= -13 \text{ ou } x = 4 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : -13 et 4.

b) $f(x) = -104$ On remarque que la forme développée contient la constante -104 : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned} f(x) &= -104 \\ 2x^2+18x-104 &= -104 \\ 2x^2+18x-104+104 &= -104+104 \\ 2x^2+18x &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par x, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned} 2x^2+18x &= 0 \\ 2x \times x + 18 \times x &= 0 \\ x(2x+18) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x = 0 \text{ ou } 2x+18 = 0 \\ & x = 0 \text{ ou } 2x = -18 \\ & x = 0 \text{ ou } x = \frac{-18}{2} \\ & x = 0 \text{ ou } x = -9 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = -9$.

c) $f(x) = -144{,}50$ On remarque que la forme canonique contient la constante $-144{,}50$: en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f(x) &= -144{,}50 \\ 2(x+4{,}5)^2 - 144{,}50 &= -144{,}50 \\ 2(x+4{,}5)^2 - 144{,}50 + 144{,}50 &= -144{,}50 + 144{,}50 \\ 2(x+4{,}5)^2 &= 0 \\ (x+4{,}5)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x+4{,}5 &= 0 \\ x &= -4{,}5 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = -4{,}5$.

►3. **a)** *Dresser le tableau de variations de f.* Dans la forme développée, le coefficient devant le x^2 est positif , donc la fonction est décroissante puis croissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{18}{2\times 2}$, soit $-4{,}5$, et $f\left(-4{,}5\right) = 2\times\left(-4{,}5\right)^2 + 18\times\left(-4{,}5\right) - 104 = -144{,}50$. Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$		$-4{,}5$		$+\infty$
$f\left(x\right)$		$\searrow$	$-144{,}50$	$\nearrow$	

b) *Dresser le tableau de signes de f.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f\left(x\right) = 2\left(x+13\right)\left(x-4\right)$.

- Le premier facteur $x+13$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a=1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b=13$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{13}{1} = -13$.
- Le second facteur $x-4$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a=1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b=-4$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-4}{1} = 4$.

x	$-\infty$		-13		4		$+\infty$
2		$+$		$+$		$+$	
$x+13$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$f\left(x\right) = 2\left(x+13\right)\left(x-4\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

►4. Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

a) *Résoudre $f\left(x\right)\geqslant 0$.* En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que f est positive sur les premier et dernier intervalles . Les solutions sont donc :

$x\in\left]-\infty\,;\,-13\right]\cup\left[4\,;\,+\infty\right[$

b) *Quel est l'extremum de f ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus petite valeur prise par f est $-144{,}50$. Le minimum de f est donc $-144{,}50$, et il est atteint pour $x=-4{,}5$.