Corrigé de l'exercice 1

►1. Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants, et préciser quand il s'agit d'un nombre premier :

$$\begin{aligned}1197 &= 3\times 399\\ &= 3\times 3\times 133\\ &= 3\times 3\times 7\times 19\end{aligned}$$

419 est un nombre premier.
677 est un nombre premier.

$$\begin{aligned}92 &= 2\times 46\\ &= 2\times 2\times 23\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1710 &= 2\times 855\\ &= 2\times 3\times 285\\ &= 2\times 3\times 3\times 95\\ &= 2\times 3\times 3\times 5\times 19\end{aligned}$$

►2. En déduire le PGCD et le PPCM des nombres 1 710 et 1 197.
D'après la question 1), on sait que les nombres 1 710 et 1 197 ont comme facteurs premiers communs : 3,3,19.
On en déduit que le PGCD des nombres 1 710 et 1 197 est : $3\times 3\times 19 = 171$.
Il existe plusieurs méthodes pour calculer le PPCM de 1 710 et de 1 197.
En voici deux :

a) On peut simplement utiliser la formule : $a\times b = PGCD(a;\ b)\times PPCM(a;\ b)$.
Donc : $PPCM(1\,710;\ 1\,197) = \dfrac{1\,710\times 1\,197}{171} = 11\,970$.

b) On peut aussi multiplier un nombre par les "facteurs complémentaires" de l'autre. Ces "facteurs complémentaires" sont les facteurs qui complètent le PGCD pour former le nombre.
Comme $PGCD(1\,710;\ 1\,197) = 171 = 3\times 3\times 19$, alors les "facteurs complémentaires" de $1\,710 = 2\times 3\times 3\times 5\times 19$ sont : 2 , 5. On en déduit que $PPCM(1\,710;\ 1\,197) = 1\,197\times 2\times 5 = 11\,970$.

►3. Pour obtenir un carré parfait, il faut que sa décomposition en facteurs premiers ne contienne que des facteurs apparaissant un nombre pair de fois. D'après la question 1, la décomposition en facteurs premiers de 677 est lui-même, car c'est un nombre premier. Il faut donc encore multiplier ce nombre par le facteur 677.
Le nombre cherché est par conséquent 677 et le carré parfait obtenu est 458 329.

►4. Le moyen le plus rapide de simplifier cette fraction estde diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD. D'après la question 2), PGCD(1 710 ; 1 197) = 171, donc on obtient :
$\dfrac{1\,710\div 171}{1\,197\div 171} = \dfrac{10}{7}$.

►5. Il faut mettre les fractions au même dénominateur. Grâceà la question 2), nous avons déjà un dénominateur commun : le PPCM des nombres 1 710 et 1 197, qui est par définition le plus petitmultiple commun de ces deux nombres.
$\dfrac{25\times 7}{1\,710\times 7} + \dfrac{35\times 10}{1\,197\times 10} = \dfrac{175}{11\,970} + \dfrac{350}{11\,970} = \dfrac{525\div 105}{11\,970\div 105} = \dfrac{5}{114}$.

Corrigé de l'exercice 2

►1. Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants, et préciser quand il s'agit d'un nombre premier :

$178 = 2 \times 89$

$$\begin{aligned}1408 &= 2 \times 704\\ &= 2 \times 2 \times 352\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 176\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 88\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 44\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 22\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 11\end{aligned}$$

661 est un nombre premier.

83 est un nombre premier.

$$\begin{aligned}1024 &= 2 \times 512\\ &= 2 \times 2 \times 256\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 128\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 64\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 32\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 16\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 8\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 4\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2\end{aligned}$$

▶**2.** En déduire le PGCD et le PPCM des nombres 1 408 et 1 024.
D'après la question 1), on sait que les nombres 1 408 et 1 024 ont comme facteurs premiers communs : 2,2,2,2,2,2,2.
On en déduit que le PGCD des nombres 1 408 et 1 024 est : $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 128$.
Il existe plusieurs méthodes pour calculer le PPCM de 1 408 et de 1 024.
En voici deux :

a) On peut simplement utiliser la formule : $a \times b = PGCD(a;\ b) \times PPCM(a;\ b)$.
Donc : $PPCM(1\,408;\ 1\,024) = \dfrac{1\,408 \times 1\,024}{128} = 11\,264$.

b) On peut aussi multiplier un nombre par les "facteurs complémentaires" de l'autre. Ces "facteurs complémentaires" sont les facteurs qui complètent le PGCD pour former le nombre.
Comme $PGCD(1\,408;\ 1\,024) = 128 = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2$, alors les "facteurs complémentaires" de $1\,408 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 11$ est : 11. On en déduit que $PPCM(1\,408;\ 1\,024) = 1\,024 \times 11 = 11\,264$.

▶**3.** Pour obtenir un carré parfait, il faut que sa décomposition en facteurs premiers ne contienne que des facteurs apparaissant un nombre pair de fois. D'après la question 1, la décomposition en facteurs premiers de 83 est lui-même, car c'est un nombre premier. Il faut donc encore multiplier ce nombre par le facteur 83.
Le nombre cherché est par conséquent 83 et le carré parfait obtenu est 6 889.

▶**4.** Le moyen le plus rapide de simplifier cette fraction estde diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD. D'après la question 2), PGCD(1 408 ; 1 024) = 128, donc on obtient :
$\dfrac{1\,408_{\div 128}}{1\,024_{\div 128}} = \dfrac{11}{8}$.

▶**5.** Il faut mettre les fractions au même dénominateur. Grâceà la question 2), nous avons déjà un dénominateur commun : le PPCM des nombres 1 408 et 1 024, qui est par définition le plus petitmultiple commun de ces deux nombres.
$\dfrac{43_{\times 8}}{1\,408_{\times 8}} + \dfrac{7_{\times 11}}{1\,024_{\times 11}} = \dfrac{344}{11\,264} + \dfrac{77}{11\,264} = \dfrac{421}{11\,264}$.

Corrigé de l'exercice 3

▶**1.** Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants, et préciser quand il s'agit d'un nombre premier :

$694 = 2 \times 347$

827 est un nombre premier.

$$\begin{aligned}340 &= 2 \times 170\\ &= 2 \times 2 \times 85\\ &= 2 \times 2 \times 5 \times 17\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}902 &= 2 \times 451\\ &= 2 \times 11 \times 41\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}540 &= 2 \times 270\\ &= 2 \times 2 \times 135\\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 45\\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 15\\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5\end{aligned}$$

►**2.** En déduire le PGCD et le PPCM des nombres 340 et 540.
D'après la question 1), on sait que les nombres 340 et 540 ont comme facteurs premiers communs : 2,2,5.
On en déduit que le PGCD des nombres 340 et 540 est : $2 \times 2 \times 5 = 20$.
Il existe plusieurs méthodes pour calculer le PPCM de 340 et de 540.
En voici deux :

a) On peut simplement utiliser la formule : $a \times b = PGCD(a;\ b) \times PPCM(a;\ b)$.
Donc : $PPCM(340;\ 540) = \dfrac{340 \times 540}{20} = 9\,180$.

b) On peut aussi multiplier un nombre par les "facteurs complémentaires" de l'autre. Ces "facteurs complémentaires" sont les facteurs qui complètent le PGCD pour former le nombre.
Comme $PGCD(340;\ 540) = 20 = 2 \times 2 \times 5$, alors les "facteurs complémentaires" de $340 = 2 \times 2 \times 5 \times 17$ est : 17. On en déduit que $PPCM(340;\ 540) = 540 \times 17 = 9\,180$.

►**3.** Pour obtenir un carré parfait, il faut que sa décomposition en facteurs premiers ne contienne que des facteurs apparaissant un nombre pair de fois. D'après la question 1, la décomposition en facteurs premiers de 694 est :
$694 = 2 \times 347$.
Il faut donc encore multiplier ce nombre par les facteurs 2 et 347.
Le nombre cherché est par conséquent 694 et le carré parfait obtenu est 481 636.

►**4.** Le moyen le plus rapide de simplifier cette fraction estde diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD. D'après la question 2), PGCD(340 ; 540) = 20, donc on obtient :
$\dfrac{340_{\div 20}}{540_{\div 20}} = \dfrac{17}{27}$.

►**5.** Il faut mettre les fractions au même dénominateur. Grâceà la question 2), nous avons déjà un dénominateur commun : le PPCM des nombres 340 et 540, qui est par définition le plus petitmultiple commun de ces deux nombres.
$\dfrac{13_{\times 27}}{340_{\times 27}} + \dfrac{39_{\times 17}}{540_{\times 17}} = \dfrac{351}{9\,180} + \dfrac{663}{9\,180} = \dfrac{1\,014_{\div 6}}{9\,180_{\div 6}} = \dfrac{169}{1\,530}$.

Corrigé de l'exercice 4

►**1.** Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants, et préciser quand il s'agit d'un nombre premier :

683 est un nombre premier.

$$\begin{aligned}345 &= 3 \times 115\\ &= 3 \times 5 \times 23\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}450 &= 2 \times 225\\ &= 2 \times 3 \times 75\\ &= 2 \times 3 \times 3 \times 25\\ &= 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5\end{aligned}$$

251 est un nombre premier.

$$\begin{aligned}874 &= 2 \times 437\\ &= 2 \times 19 \times 23\end{aligned}$$

►2. En déduire le PGCD et le PPCM des nombres 345 et 450.

D'après la question 1), on sait que les nombres 345 et 450 ont comme facteurs premiers communs : 3,5.

On en déduit que le PGCD des nombres 345 et 450 est : $3 \times 5 = 15$.

Il existe plusieurs méthodes pour calculer le PPCM de 345 et de 450.

En voici deux :

a) On peut simplement utiliser la formule : $a \times b = PGCD(a;\ b) \times PPCM(a;\ b)$.
Donc : $PPCM(345;\ 450) = \dfrac{345 \times 450}{15} = 10\,350$.

b) On peut aussi multiplier un nombre par les "facteurs complémentaires" de l'autre. Ces "facteurs complémentaires" sont les facteurs qui complètent le PGCD pour former le nombre.
Comme $PGCD(345;\ 450) = 15 = 3 \times 5$, alors les "facteurs complémentaires" de $345 = 3 \times 5 \times 23$ est : 23. On en déduit que $PPCM(345;\ 450) = 450 \times 23 = 10\,350$.

►3. Pour obtenir un carré parfait, il faut que sa décomposition en facteurs premiers ne contienne que des facteurs apparaissant un nombre pair de fois. D'après la question 1, la décomposition en facteurs premiers de 874 est :

$874 = 2 \times 19 \times 23$.

Il faut donc encore multiplier ce nombre par les facteurs 2 , 19 et 23.

Le nombre cherché est par conséquent 874 et le carré parfait obtenu est $763\,876$.

►4. Le moyen le plus rapide de simplifier cette fraction estde diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD. D'après la question 2), PGCD(345 ; 450) = 15, donc on obtient :

$\dfrac{345_{\div 15}}{450_{\div 15}} = \dfrac{23}{30}$.

►5. Il faut mettre les fractions au même dénominateur. Grâceà la question 2), nous avons déjà un dénominateur commun : le PPCM des nombres 345 et 450, qui est par définition le plus petitmultiple commun de ces deux nombres.

$\dfrac{27_{\times 30}}{345_{\times 30}} + \dfrac{43_{\times 23}}{450_{\times 23}} = \dfrac{810}{10\,350} + \dfrac{989}{10\,350} = \dfrac{1\,799}{10\,350}$.