CORRECTION AMÉRIQUE DU NORD MAI 2013

Corrigé de l'exercice 1

1. $\boxed{e^{-\frac{1}{a}} = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{a}}}}$.

2. $e^u > 0$ et on sait que $e^a = e^{2\times\frac{a}{2}} = \left(e^{\frac{a}{2}}\right)^2$ donc $\boxed{e^{\frac{a}{2}} = \sqrt{e^a}}$.

3. $\ln\left(-\dfrac{1}{x}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{-x}\right)$ donc $\boxed{\ln\left(-\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(-x)}$.

4. $f'(x) = 1\times\ln(x) + x\times\dfrac{1}{x}$ donc $\boxed{f'(x) = \ln(x)+1}$.

Corrigé de l'exercice 2

1. **a.** $\boxed{p(30 \leqslant X \leqslant 35) \approx 0,133}$.

   b. $p(X \geqslant 55) = 0,5 - p(40,5 \leqslant X \leqslant 55)$ donc $\boxed{p(X \geqslant 55) \approx 0,113}$.

2. **a.** $n = 1\,000 \leqslant 30$, $p = 0,75$ et l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95 % de la fréquence est donné par

   $I_F = \left[p - 1,96\times\dfrac{\sqrt{p\times(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\times\dfrac{\sqrt{p\times(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$

   Remarque : $n \geqslant 30$, $n\times p = 1000\times 0,75 = 750 \geqslant 5$ et $n\times(1-p) = 250 \geqslant 5$.

   donc $\boxed{I_F = [0,723\ ;\ 0,777]}$.

   b. On suppose que $p = 0,75$ et on note f_{obs} la fréquence observée sur un échantillon de taille $n = 1\,000$.
   Si f_{obs} appartient à I_F alors on accepte l'hypothèse $p = 0,75$;
   Si f_{obs} n'appartient pas à I_F alors on rejette l'hypothèse $p = 0,75$ avec un risque de 5 % de se tromper.

   c. $f_{\text{obs}} = \dfrac{600}{1\,000} = 0,6$ donc f_{obs} n'appartient pas à I_F (défini ci-dessus). On peut penser que le slogan publicitaire est faux avec un risque de 5 % de se tromper.

Corrigé de l'exercice 3 (enseignement obligatoire)

1. u_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1er janvier de l'année $(2013+n)$. Chaque année 5 % des ouvrages sont supprimés, il reste donc $\left(1-\dfrac{5}{100}\right)\times u_n = 0,95\times u_n$.
   Elle achète 6 000 ouvrages neufs soit 6 milliers donc le nombre d'ouvrages devient $0,95\times u_n + 6$.
   Pour tout entier naturel n, $\boxed{u_{n+1} = 0,95\times u_n + 6}$.
2. Cet algorithme détermine le plus petit entier naturel N tel que $u_{\text{N}} > 100$.
3. On note $u_{26} \approx 99,445 < 100$ et $u_{27} \approx 100,473 > 100$ donc la valeur de N affichée est $\boxed{27}$.

Partie A

1. Il faut modifier la 8e ligne et l'algorithme devient :

```
Variables :
   U, N
Initialisation :
   Mettre 42 dans U
   Mettre 0 dans N
Traitement :
   Tant que U < 100
      U prend la valeur U × 0,95 + 4
      N prend la valeur N +1
   Fin du Tant que
Sortie
Afficher N.
```

Remarque : même si la suite s'appelle v on peut conserver la lettre U.

2. Pour tout entier naturel n, $w_n = v_n - 80$ donc $v_n = w_n + 80$.
$w_{n+1} = v_{n+1} - 80 = v_n \times 0,95 + 4 - 80 = (w_n + 80) \times 0,95 - 76 = 0,95\,w_n + 76 - 76$ donc $\boxed{w_{n+1} = 0,95\,w_n}$.
De plus $w_0 = v_0 - 80 = 42 - 80 = -38$, donc la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $0,95$ et de premier terme $w_0 = -38$.

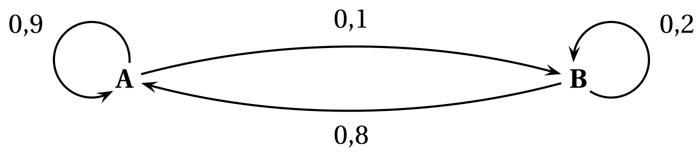
3. a. $0 < 0,95 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,95^n = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0}$.

b. Pour tout entier naturel n, $v_n = w_n + 80$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 80}$.

c. Au bout d'un nombre assez grand d'années, le nombre d'ouvrages sera de 80 000. Notons que l'algorithme ci-dessus tourne sans fin puisque 100 est une valeur qu'on ne peut atteindre.

Corrigé de l'exercice 3 (enseignement de spécialité)

1. a. Appelons A l'état probabiliste « Léa s'est connectée », B l'état probabiliste « Léa ne s'est pas connectée ».
On considère que :
Si Léa s'est connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à $0,9$ d'où $p_{A_n}(A_{n+1}) = 0,9$ et $p_{A_n}(B_{n+1}) = 0,1$.
Si Léa ne s'est pas connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à $0,8$ soit $p_{B_n}(A_{n+1}) = 0,8$ et $p_{B_n}(B_{n+1}) = 0,2$.
On en déduit le graphe probabiliste correspondant à cette situation :



b. La matrice de transition M de ce graphe vérifiant $(a_{n+1}\ b_{n+1}) = (a_n\ b_n) \times M$ est : $M = \begin{pmatrix} 0,90 & 0,1 \\ 0,80 & 0,20 \end{pmatrix}$.

c. Le 1^er jour, Léa ne s'est pas connectée donc l'état initial est $P_1 = (0\ 1)$.
L'état P_3 au jour 3 est :
$P_3 = P_1 \times M^2 = (0\ 1) \times \begin{pmatrix} 0,90 & 0,1 \\ 0,80 & 0,2 \end{pmatrix}^2 = (0,88\ 0,12)$.
La probabilité que Léa se connecte le troisième jour est égale à $0,88$.

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$,
$P_{n+1} = P_n \times M \iff \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9a_n + 0,8b_n & 0,1a_n + 0,2b_n \end{pmatrix}$.
D'où $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,8b_n$ avec pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_n + b_n = 1$. D'où $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,8 \times (1 - a_n) = 0,1a_n + 0,8$.
Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 0,1a_n + 0,8$.

3. a. Pour tout entier $n \geqslant 1$,
$u_{n+1} = a_{n+1} - \dfrac{8}{9} \iff u_{n+1} = 0,1a_n + 0,8 - \dfrac{8}{9} u_{n+1} = 0,1a_n - \dfrac{4}{45} \iff u_{n+1} = 0,1 \times \left(a_n - \dfrac{8}{9}\right) u_{n+1} = 0,1u_n$.
Donc, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0,1u_n$ donc (u_n) est une suite géométrique de raison $0,1$. Mais $u_1 = a_1 - \dfrac{8}{9}$, soit $u_1 = -\dfrac{8}{9}$.
(u_n) est une suite géométrique de raison $0,1$ et de premier terme $u_1 = -\dfrac{8}{9}$.

b. (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,1$ et de premier terme $u_1 = -\dfrac{8}{9}$ alors, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = u_1 \times q^{n-1}$, soit $u_n = -\dfrac{8}{9} \times 0,1^{n-1}$.
Or pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = a_n - \dfrac{8}{9} \iff a_n = u_n + \dfrac{8}{9} \iff a_n = -\dfrac{8}{9} \times 0,1^{n-1} + \dfrac{8}{9} \iff a_n = -\dfrac{80}{9} \times 0,1^n + \dfrac{8}{9}$.
Ainsi pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_n = -\dfrac{80}{9} \times 0,1^n + \dfrac{8}{9}$.

4. **a.** Comme $0 < 0,1 < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,1^n = 0$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{80}{9} \times 0,1^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{80}{9} \times 0,1^n + \dfrac{8}{9} = \dfrac{8}{9}$. Soit $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \dfrac{8}{9}$.

   Conclusion : la suite (a_n) converge vers $\dfrac{8}{9}$.

   b. La suite (a_n) convergeant vers $\dfrac{8}{9}$, à partir d'un certain nombre de jours, la probabilité que Léa se connecte chaque jour est égale à $\dfrac{8}{9}$.

Corrigé de l'exercice 4

Partie A

1. Le point D est sur la courbe C_f donc $\boxed{f(2) = 0}$. La tangente à la courbe C_f au point A (0 ; 2) est parallèle à l'axe des abscisses donc $\boxed{f'(0) = 0}$.
2. $f'(x) = -1 \times \mathrm{e}^{ax} + (b - x) \times a\mathrm{e}^{ax}$ donc $\boxed{f'(x) = (-1 + ab - ax)\mathrm{e}^{ax}}$.
3. D'une part $f(2) = 0$ donc $(b-2)\,\mathrm{e}^{2a} = 0$, or $\mathrm{e}^{ax} > 0$ donc $b - 2 = 0$.
   D'autre part $f'(0) = 0$ donc $(-1 + ab)\mathrm{e}^0 = 0$ donc $ab - 1 = 0$.
   Finalement $\left\{\begin{array}{rcl} b-2 & = & 0 \\ ab-1 & = & 0 \end{array}\right.$
4. $b - 2 = 0$ donne $b = 2$ et donc $2a - 1 = 0$ donc $a = \dfrac{1}{2} = 0,5$ donc $\boxed{a = 0,5 \text{ et } b = 2}$.

Partie B

1. Sur $[0 ; 2]$, $f(x) \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ est la valeur de l'aire qui est entre la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$, exprimée en unité d'aire.

   Cette aire est supérieure à 2 unités d'aire et inférieure à 4 unités d'aire donc $\boxed{2 \leqslant \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 4}$.

   a. $F'(x) = -2 \times \mathrm{e}^{0,5x} + (-2x + 8) \times 0,5\,\mathrm{e}^{0,5x} = -2\,\mathrm{e}^{0,5x} - x\,\mathrm{e}^{0,5x} + 4\,\mathrm{e}^{0,5x} = -x\,\mathrm{e}^{0,5x} + 2\,\mathrm{e}^{0,5x} = (2 - x)\,\mathrm{e}^{0,5x}$ donc $\boxed{F'(x) = f(x)}$.
   F est donc bien une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   b. $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^2 = F(2) - F(0) = 4\,\mathrm{e}^1 - 8\,\mathrm{e}^0 = 4\,\mathrm{e} - 8$ donc $\boxed{\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4\,\mathrm{e} - 8 \approx 2,87}$.

2. Notons que $G'(x) = f(x)$ et $f(x) \geqslant 0$ sur $[0 ; 2]$ donc la fonction G est croissante sur $[0 ; 2]$ donc la courbe de la fonction G est la courbe C_3.