Baccalauréat ES Asie – 19 juin 2013
Corrigé

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

On ne demandait aucune justification dans cet exercice.

1. **b.**
   La longueur de l'intervalle $[-1\,;1]$ *est* 2 *; celle de l'intervalle* $[-2\,;5]$ *est* 7*. D'après la loi uniforme, on fait le quotient des longueurs des intervalles.*
2. **a.**
   On peut utiliser la calculatrice pour obtenir la réponse.
3. **c.**
   On peut éliminer rapidement les courbes ***a.*** *et* ***d.****. Comme l'aire sous la courbe doit être égale à* 1*, on peut éliminer la courbe* ***b.***
4. **c.**
   L'intervalle de confiance est $\left[f-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ *donc* $\left[\dfrac{424}{800}-\dfrac{1}{\sqrt{800}}\,;\dfrac{424}{800}+\dfrac{1}{\sqrt{800}}\right]$.

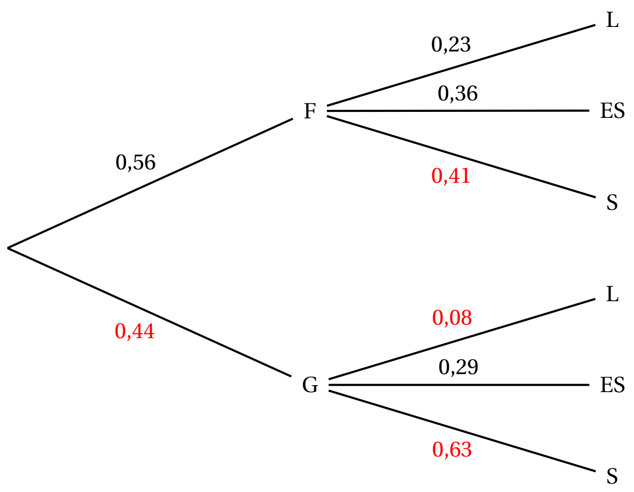
EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On remarque d'abord qu'on interroge au hasard un élève de terminale, donc on est dans un cas d'équiprobabilité.

1. **a.** Il y a en tout 138 617 garçons dont 11 080 en série littéraire.
   Comme on est dans un cas d'équiprobabilité, la probabilité que l'élève interrogé soit en série littéraire sachant que c'est un garçon est : $p_{\text{G}}(\text{L}) = \dfrac{11\,080}{138\,617} \approx 0{,}08$.

   b. L'événement S représente « L'élève choisi est en série scientifique ».
   Il y a $71\,765 + 87\,031 = 158\,796$ élèves en série scientifique sur un total de $176\,109 + 138\,617 = 314\,617$ élèves. Donc $p(\text{S}) = \dfrac{158\,796}{314\,617} \approx 0{,}50$.
2. On complète l'arbre donné dans le texte :



3. **a.** D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(\text{ES}) &= p(\text{F}\cap\text{ES}) + p(\text{G}\cap\text{ES}) = p(\text{F})\times p_{\text{F}}(\text{ES}) + p(\text{G})\times p_{\text{G}}(\text{ES}) \\ &= 0{,}56\times 0{,}36 + 0{,}44\times 0{,}29 = 0{,}2016 + 0{,}1276 = 0{,}3292 \\ &\approx 0{,}33 \end{aligned}$$

b. $p_{\text{ES}}(\text{F}) = \dfrac{p(\text{ES} \cap \text{F})}{p(\text{ES})} = \dfrac{0,2016}{0,3292} \approx 0,61$

4. On choisit successivement et au hasard 10 élèves de terminale de série générale. On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre d'élèves de la série ES parmi les 10 élèves choisis.

La probabilité de choisir un élève de ES est 0,33 et on admet que le nombre de lycéens est suffisamment grand pour que les choix des 10 élèves soient assimilés à des tirages indépendants avec remise.

On peut donc dire que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,33$.

Pour une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres n et p, la probabilité d'obtenir k succès est donnée par : $p(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Donc la probabilité de choisir exactement trois élèves de la série ES est :

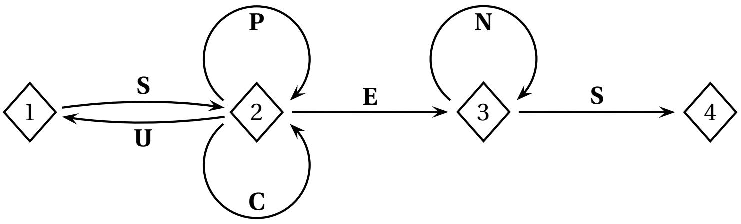
$p(X = 3) = \dbinom{10}{3} 0,33^3 (1 - 0,33)^{10-3} \approx 0,26$

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère le graphe étiqueté suivant :



1. Parmi les trois codes suivants :

SUCCES SCENES SUSPENS

le seul reconnu par le graphe est SUSPENS.

2. La matrice d'adjacence du graphe ci-dessus est une matrice carrée d'ordre 4 (le nombre de sommets) dans laquelle l'élément situé sur la ligne i et la colonne j donne le nombre de chemins de longueur 1 allant du sommet i au sommet j du graphe.

La matrice d'adjacence de ce graphe est donc : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

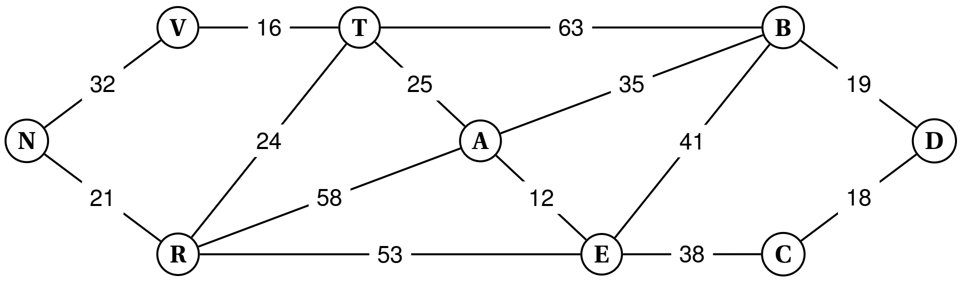
3. Avec une calculatrice on a calculé : $A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 8 & 3 \\ 12 & 29 & 20 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Cette matrice donne, à la ligne i et à la colonne j, le nombre de chemins de longueur 4 allant du sommet i au sommet j du graphe.

Le nombre 3 situé sur la première ligne et la quatrième colonne de la matrice A^4, représente le nombre de mots de 4 lettres allant du sommet 1 au sommet 4, c'est-à-dire le nombre de codes reconnus par le graphe.

Il y a donc 3 codes de 4 lettres reconnus par ce graphe : SPES, SCES et SENS.

Partie B



Antoine décide d'aller visiter neuf châteaux de la Loire.
Il a construit le graphe ci-dessus où les sommets représentent :

A : Amboise	B : Blois	C : Cheverny	D : Chambord
E : Chenonceau	T : Tours	V : Villandry	R : Azay-le-Rideau
N : Chinon			

Sur les arêtes sont indiquées les distances en km

1. Un chemin qui passe une fois et une seule par toutes les arêtes d'un graphe est un chemin « eulérien » ; un chemin eulérien qui part d'un sommet et qui revient au même sommet est un « cycle eulérien ».
   Un graphe possède un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair. C'est le cas de ce graphe, donc Antoine peut partir de Blois et y revenir en parcourant une et une seule fois chacune des routes matérialisées par les arêtes de ce graphe.
   Un cycle eulérien partant de Blois est : B - T - V - N - R - T - A - B - E - A - R - E - C - D - B
2. On détermine le plus court chemin allant du château de Chambord (D) au château de Chinon (N) en utilisant l'algorithme de Dijkstra :

A	B	C	D	E	N	R	T	V	On garde
∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞	∞	D
∞	19	18		∞	∞	∞	∞	∞	C (D)
∞	19			56	∞	∞	∞	∞	B (D)
54				~~60~~ 56	∞	∞	82	∞	A (B)
				~~66~~ 56	∞	112	~~82~~ 79	∞	E (A)
					∞	~~112~~ 109	79	∞	T (A)
					∞	~~109~~ 103		95	V (T)
					127	103			R (T)
					~~127~~ 124				N (R)

Le trajet le plus court reliant Chambord à Chinon fait 124 km : D $\xrightarrow{19}$ B $\xrightarrow{35}$ A $\xrightarrow{25}$ T $\xrightarrow{24}$ R $\xrightarrow{21}$ N

EXERCICE 3 **6 points**
Commun à tous les candidats

Le gestionnaire d'une salle de concert constate que, chaque année, le nombre d'abonnés est constitué de 70 % des abonnés de l'année précédente, auxquels s'ajoutent 210 nouveaux abonnés.
Le nombre d'abonnés en 2010 était de 600.

1. $600 \times \dfrac{70}{100} = 420$ et $420 + 210 = 630$; le nombre d'abonnés en 2011 est de 630.
   $630 \times \dfrac{70}{100} = 441$ et $441 + 210 = 651$; le nombre d'abonnés en 2012 est de 651.

2. On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 600$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 210$.
On utilise un tableur pour calculer les termes de la suite (u_n) :

	A	B
1	n	u n
2	0	600
3	1	
4	2	

La formule à écrire dans la cellule B3 pour calculer u_1 est $\boxed{= \text{B2*0.7} + 210}$; on recopie cette formule dans les cases B4, B5, etc.

3. On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 700$; donc $u_n = v_n + 700$.

a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 700 = 0{,}7\,u_n + 210 - 700 = 0{,}7\,(v_n + 700) - 490 = 0{,}7\,v_n + 490 - 490 = 0{,}7\,v_n$
$v_0 = u_0 - 700 = 600 - 700 = -100$
Donc la suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = -100$ et de raison $q = 0{,}7$.
On en déduit que, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n$ donc $v_n = -100 \times 0{,}7^n$.

b. On a vu que, pour tout n, $u_n = v_n + 700$ donc on peut dire que $u_n = -100 \times 0{,}7^n + 700$ ce qui équivaut à $u_n = 700 - 100 \times 0{,}7^n$.

4. a. $u_n \geqslant 697 \iff 700 - 100 \times 0{,}7^n \geqslant 697 \iff 3 \geqslant 100 \times 0{,}7^n \iff 0{,}03 \geqslant 0{,}7^n \iff 0{,}7^n \leqslant 0{,}03$

b. Pour résoudre cette inéquation, on fait tourner l'algorithme proposé dans le texte (valeurs de U arrondies au millième dès que nécessaire) :

	N	U
Initialisation	0	1
Traitement	1	0,7
	2	0,49
	3	0,343
	4	0,240
	5	0,168
	6	0,118
	7	0,082
	8	0,058
	9	0,040
	10	0,028
Sortie	On affiche 10	

On obtient 10 pour valeur de N en sortie.

c. On résout l'inéquation $0{,}7^n \leqslant 0{,}03$:

$$0{,}7^n \leqslant 0{,}03 \iff \ln(0{,}7^n) \leqslant \ln(0{,}03) \iff n \times \ln(0{,}7) \leqslant \ln(0{,}03) \iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}03)}{\ln(0{,}7)}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}03)}{\ln(0{,}7)} \approx 9{,}83$ donc $n \geqslant 10$ car n est un nombre entier.

d. Le nombre d'abonnés atteindra au moins 697 pour l'entier naturel n tel que $u_n \geqslant 697$ c'est-à-dire pour $n \geqslant 10$ donc à partir de l'année $2010 + 10$ soit 2020.

Exercice 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'ensemble des nombres réels.
Elle passe par les points $A\left(1\,;\,4\,\mathrm{e}^{0,5}\right)$, $B\,(0\,;\,5)$ et $C\,(5\,;\,0)$.
Le point $D\,(-3\,;\,0)$ appartient à la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A.
On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

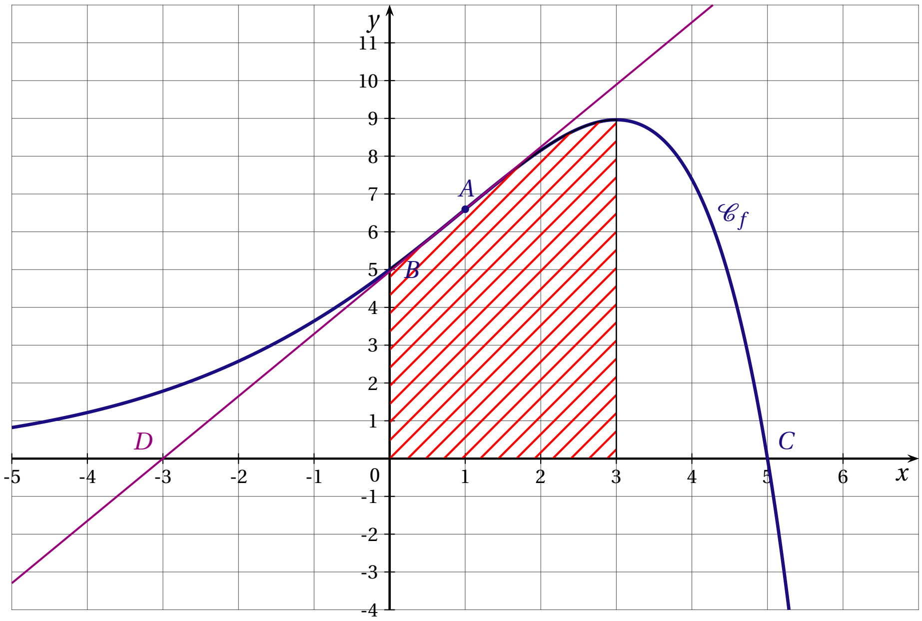
Partie A - Par lecture graphique

1. Le nombre $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe passant par le point A qui est d'abscisse 1 ; d'après le texte, cette tangente est la droite (DA).

   Le coefficient directeur de (DA) est $\dfrac{y_A - y_D}{x_A - x_D} = \dfrac{1-(-3)}{4\,\text{e}^{0,5}-0} = \dfrac{4}{4\,\text{e}^{0,5}} \approx 0,6 > 0$. Donc $f'(1) > 0$.

2. Le point A semble représenter un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

3. **a.** Le domaine hachuré en rouge sur le graphique ci-dessous, délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$, a une aire égale à $I = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,\text{d}x$ unités d'aire.



   b. Le seul encadrement qui convient parmi les trois proposés est : $20 \leqslant I \leqslant 24$; il suffit de compter le nombre de rectangles d'aires 1 contenus dans la partie hachurée.

Partie B - Par le calcul

On admet que pour tout réel x, $f(x) = (-x+5)\,\text{e}^{0,5x}$ et $f'(x) = (1,5-0,5x)\,\text{e}^{0,5x}$.
On note f'' la fonction dérivée seconde de f sur $\mathbb{R}$.

1. **a.** $f''(x) = -0,5\,\text{e}^{0,5x} + (1,5-0,5x)\left(0,5\,\text{e}^{0,5x}\right) = -0,5\,\text{e}^{0,5x} + 0,75\,\text{e}^{0,5x} - 0,25\,x\,\text{e}^{0,5x}$

   $= 0,25\,\text{e}^{0,5x} - 0,25\,x\,\text{e}^{0,5x} = 0,25(-x+1)\,\text{e}^{0,5x}$

   b. $f''(x) = 0 \iff 0,25(-x+1)\,\text{e}^{0,5x} = 0 \iff -x+1 = 0$ car $\text{e}^{0,5x} > 0$ pour tout réel x.

   $f''(x) = 0 \iff x = 1$

   Le point de la courbe d'abscisse 1 est donc le seul point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$; il s'agit du point A.

   c. On sait qu'une fonction est convexe sur un intervalle si et seulement si sa dérivée seconde est strictement positive sur cet intervalle.

   On résout $f''(x) > 0 \iff 0,25(-x+1)\,\text{e}^{0,5x} \iff -x+1 > 0$ car $\text{e}^{0,5x} > 0$ pour tout x.

   $f''(x) > 0 \iff -x+1 > 0 \iff 1 > x \iff x < 1$

   La fonction f est donc convexe sur l'intervalle $]-\infty\,; 1[$.

2. Soit F la fonction définie, pour tout réel x, par $F(x) = (-2x+14)\,\text{e}^{0,5x}$, une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

   D'après le cours :

   $I = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,\text{d}x = F(3) - F(0) = \left((-6+14)\,\text{e}^{0,5\times 3}\right) - \left(14\,\text{e}^{0}\right) = 8\,\text{e}^{1,5} - 14 \approx 21,85$ unités d'aire.