

# ∞ Corrigé du baccalauréat ES Asie 19 juin 2014 ∞

## EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

**Proposition 1 : fausse**

$f'(4)$  est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point C ; cette droite passe par les points C et D. Son coefficient directeur est égal à  $\frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} = \frac{0 - 3}{4 - 2} = \frac{-3}{2} \neq -\frac{2}{3}$ .

**Proposition 2 : fausse**

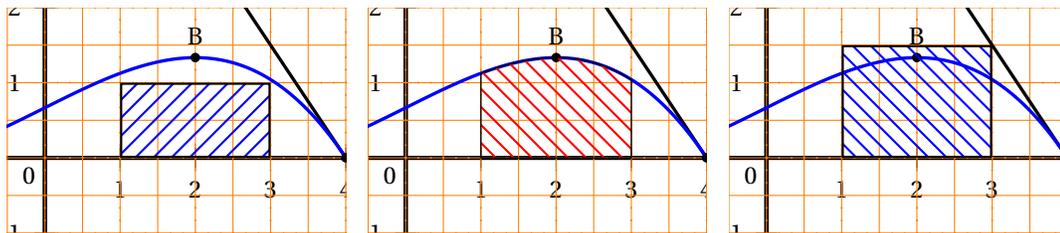
Une fonction est concave sur un intervalle si sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes ; cela se produit lorsque sa dérivée est décroissante sur cet intervalle.

D'après le graphique et le texte, la dérivée de  $f$  est nulle en  $x = -2$ , puis est positive entre  $-2$  et  $2$  et est à nouveau nulle en  $x = 2$  ; donc  $f'$  n'est pas décroissante sur  $[-2; 2]$  et donc la fonction  $f$  n'est pas concave sur cet intervalle.

**Proposition 3 : vraie**

La fonction  $f$  est positive sur  $[1; 3]$  donc  $\int_1^3 f(x) dx$  est égale à l'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses, et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = 3$  (aire hachurée en rouge sur le dessin du milieu).

Cette aire est comprise entre 2 (aire du rectangle de gauche) et 3 (aire du rectangle de droite) :



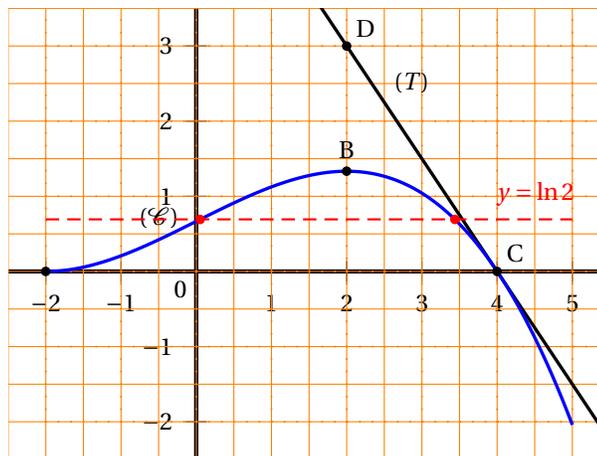
Aire égale à 2

$$\int_1^3 f(x) dx$$

Aire égale à 3

**Proposition 4 : fausse**

Les solutions de l'équation  $f(x) = \ln 2$  sont les abscisses des deux points d'intersection de  $\mathcal{C}$  et de la droite d'équation  $y = \ln 2$  ; cette équation a donc deux solutions sur  $[-2; 5]$ .



**EXERCICE 2****5 points****Enseignement obligatoire et spécialité L**

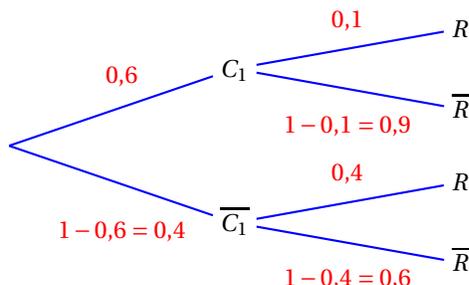
On s'intéresse aux résultats d'un concours où l'on ne peut pas se présenter plus de deux fois.

**Partie A : étude des résultats de mai 2013**

Les statistiques dressées à partir des résultats de la session de mai 2013 ont permis d'établir que :

- 60 % des personnes qui présentaient le concours le présentaient pour la première fois donc  $P(C_1) = 0,6$ ;
  - 10 % de ceux qui le présentaient pour la première fois ont été admis donc  $P_{C_1}(R) = 0,1$ ;
  - 40 % de ceux qui le présentaient pour la seconde fois l'ont réussi donc  $P_{\overline{C_1}}(R) = 0,4$ .

On peut donc construire un arbre pondéré regroupant les résultats précédents et en déduire d'autres probabilités :



- « La personne s'est présentée au concours pour la première fois et a été admise » est l'événement  $C_1 \cap R$  :

$$P(C_1 \cap R) = P(C_1) \times P_{C_1}(R) = 0,6 \times 0,1 = 0,06$$

- « La personne est admise au concours » est l'événement  $R$ .

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(C_1 \cap R) + P(\overline{C_1} \cap R) = 0,06 + 0,4 \times 0,4 = 0,06 + 0,16 = 0,22$$

- Sachant que cette personne a réussi le concours, la probabilité qu'elle l'ait présenté pour la première fois est  $P_R(C_1)$  :

$$P_R(C_1) = \frac{P(C_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{0,06}{0,22} = \frac{3}{11} \approx 0,27$$

**Partie B : résultats des établissements**

- L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % du pourcentage d'étudiants admis est :

$$I = \left[ p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

Le groupe est de 224 personnes donc  $n = 224$  et le taux de réussite global est de 22 % donc  $p = 0,22$  :

$$I = \left[ 0,22 - 1,96 \frac{\sqrt{0,22 \times 0,78}}{\sqrt{224}} ; 0,22 + 1,96 \frac{\sqrt{0,22 \times 0,78}}{\sqrt{224}} \right] \approx [0,16 ; 0,28]$$

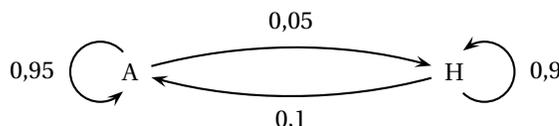
- Le pourcentage de reçus dans l'établissement étudié est de 26 % soit 0,26 ; ce nombre appartient à l'intervalle de fluctuation  $I$  donc on peut considérer que le taux de réussite de 26 % est un résultat « normal ». L'affirmation du directeur de l'établissement est donc erronée.

**EXERCICE 2****5 points****Enseignement de spécialité****Partie A**

Une entreprise E commande chaque semaine ses fournitures auprès de deux fournisseurs A et H. Les constats faits les premières semaines conduisent à modéliser l'évolution du choix du fournisseur pour les commandes d'une semaine à l'autre par un graphe probabiliste de sommets A et H où :

- A désigne l'état : « La commande est passée auprès du fournisseur A » ;
- H désigne l'état : « La commande est passée auprès du fournisseur H ».

1. On dessine le graphe probabiliste associé à la matrice de transition  $M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$  :



Pour tout entier naturel  $n$ , on note :

- $a_n$  la probabilité de l'évènement : « La semaine  $n$ , l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur A » ;
- $h_n$  la probabilité de l'évènement : « La semaine  $n$ , l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur H » ;
- $P_n$  la matrice  $\begin{pmatrix} a_n & h_n \end{pmatrix}$  correspondant à l'état probabiliste pour la semaine  $n$ .

2. Comme  $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ , la matrice  $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$  correspond à un état probabiliste.

Pour qu'elle corresponde à l'état stable, il faut de plus que  $P \times M = P$ .

$$\begin{aligned} P \times M &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \times 0,95 + \frac{1}{3} \times 0,1 & \frac{2}{3} \times 0,05 + \frac{1}{3} \times 0,9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2 \times 0,95 + 0,1}{3} & \frac{2 \times 0,05 + 0,9}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = P \end{aligned}$$

Donc la matrice  $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$  correspond à l'état stable du système.

Cela signifie que, si une année les commandes se répartissent en proportion de  $\frac{2}{3}$  pour le fournisseur A et de  $\frac{1}{3}$  pour le fournisseur H, il en sera de même l'année suivante et donc toutes les années qui suivront.

3. On donne  $P_0 = (0,4 \quad 0,6)$  et on rappelle que  $P_k = P_0 \times M^k$ , pour  $k$  entier naturel.

On cherche  $n$  tel que  $a_n > h_n$  ; pour cela on calcule, à la calculatrice :

$$P_1 = P_0 \times M = (0,44 \quad 0,56) ; P_2 = P_0 \times M^2 = (0,474 \quad 0,526) \text{ et } P_3 = P_0 \times M^3 = (0,5029 \quad 0,4971)$$

C'est donc à partir de la troisième semaine que, pour la première fois, la probabilité que l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur A dépasse la probabilité qu'elle les commande auprès du fournisseur H.

**Partie B**

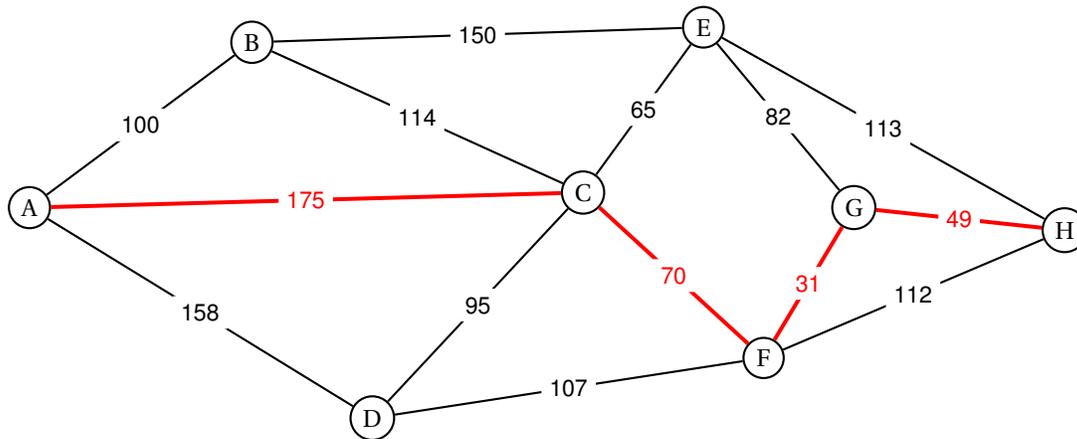
Le directeur de l'entreprise E rend visite à ses fournisseurs, il se rend du fournisseur A au fournisseur H et souhaite effectuer le moins de kilomètres possible.

Son assistant dresse un graphe qui schématise les trajets, en kilomètres, entre les six villes de la région, notées B ; C ; D ; E ; F et G et les deux sites, A et H.

L'algorithme de Dijkstra va donner tous les trajets les plus courts partant du sommet A :

A	B	C	D	E	F	G	H	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	100 (A)	175 (A)	158 (A)	∞	∞	∞	∞	B (A)
		175 (A) <del>214 (B)</del>	158 (A)	250 (B)	∞	∞	∞	D (A)
		175 (A) <del>253 (D)</del>		250 (B)	265 (D)	∞	∞	C (A)
				<del>250 (B)</del> 240 (C)	<del>265 (D)</del> 245 (C)	∞	∞	E (C)
					245 (C)	322 (E)	353 (E)	F (C)
						<del>322 (E)</del> 276 (F)	353 (E) <del>357 (F)</del>	G (F)
							<del>353 (E)</del> 325 (G)	H (G)

L'itinéraire le plus court pour aller de A à H est :  $A \xrightarrow{175} C \xrightarrow{70} F \xrightarrow{31} G \xrightarrow{49} H$   
 Il a une longueur de  $175 + 70 + 31 + 49 = 325$  kilomètres.



**EXERCICE 3****5 points****Commun à tous les candidats**

On étudie la propagation d'une maladie lors d'une épidémie.

**Partie A**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[1 ; 26]$  par :  $f(t) = 24t \ln(t) - 3t^2 + 10$

où  $t$  est le nombre de semaines écoulées depuis le premier cas constaté et  $f(t)$  est le nombre de milliers de malades comptabilisés après  $t$  semaines.

1. On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$ .

$$f'(t) = 24 \times 1 \times \ln(t) + 24 \times t \times \frac{1}{t} - 6t + 0 = 24 \ln(t) - 6t + 24$$

2. a. On complète le tableau de variations de la fonction  $f'$  :

$$f'(1) = 18 > 0 ; f'(4) = 24 \ln 4 \approx 33,3 > 0 \text{ et } f'(26) = 24 \ln(26) - 132 \approx -53,8 < 0$$

$t$	1	4	$\alpha$	26
$f'(t)$	18	33,3	0	-53,8

Diagramme du tableau de variations : une flèche pointe de 18 à 33,3, et une autre pointe de 33,3 à -53,8. Une ligne verticale en pointillés est tracée à  $t = \alpha$  entre 4 et 26.

D'après ce tableau de variations, l'équation  $f'(t) = 0$  admet une solution unique dans l'intervalle  $[1 ; 26]$  et cette solution, appelée  $\alpha$ , est dans l'intervalle  $[4 ; 26]$ .

Plus précisément :  $f'(14) \approx 3,34 > 0$  et  $f'(15) \approx -1,01 < 0$  donc  $14 < \alpha < 15$ .

- b. Du tableau de variations, on peut déduire que  $f'(t) > 0$  sur  $[1 ; \alpha[$  et que  $f'(t) < 0$  sur  $] \alpha ; 26]$ .

Donc la fonction  $f$

- est strictement croissante sur  $[1 ; \alpha]$  ;
- est strictement décroissante sur  $[\alpha ; 26]$  ;
- atteint un maximum pour  $x = \alpha$ .

3. Le réel  $f'(t)$  représente la vitesse de propagation de la maladie au bout de  $t$  semaines.

- a. L'expression mathématique suivante : « sur  $[4 ; 26]$ ,  $f'$  est décroissante » signifie que sur cet intervalle, la vitesse de propagation de la maladie diminue.

- b. Le nombre de malades par semaine commence à diminuer quand la vitesse de propagation devient négative, donc quand  $f'(t)$  devient négatif, c'est-à-dire pour  $t > \alpha$  ; donc il s'est écoulé 14 semaines avant que le nombre de malades par semaine commence à diminuer.

**Partie B**

On admet que la fonction  $G$  définie par  $G(t) = 12t^2 \ln(t) - 6t^2$

est une primitive sur  $[1 ; 26]$  de la fonction  $g$  définie par  $g(t) = 24t \ln(t)$ .

1.  $f(t) = 24t \ln(t) - 3t^2 + 10 = g(t) - 3t^2 + 10$  ; la fonction  $g$  a pour primitive la fonction  $G$  et la fonction  $t \mapsto -3t^2 + 10$  a pour primitive  $t \mapsto -t^3 + 10t$  (primitive d'une fonction polynôme).

Donc la fonction  $f$  a pour primitive sur l'intervalle  $[1 ; 26]$  la fonction  $F$  définie par

$$F(x) = 12t^2 \ln(t) - t^3 - 6t^2 + 10t.$$

2. On a trouvé que l'arrondi à l'entier de  $\frac{1}{26-1}[F(26) - F(1)]$  est 202.

$\frac{1}{26-1}[F(26) - F(1)] = \frac{1}{26-1} \int_1^{26} f(t) dt$  est la valeur moyenne de la fonction  $f$  entre 1 et 26 ; donc le nombre moyen de malades comptabilisés entre les semaines 1 et 26 est de 202 milliers.

**EXERCICE 4****6 points****Commun à tous les candidats**

On étudie l'évolution de la population d'une ville, depuis le 1<sup>er</sup> janvier 2008.

**Partie A : un premier modèle**

Pour cette partie, on admet que la population augmente de 3,5 % par an depuis le 1<sup>er</sup> janvier 2008.

1. Une augmentation annuelle de 3,5 % correspond à une multiplication par  $1 + \frac{3,5}{100}$  soit 1,035.  
Si cette augmentation se produit pendant 6 ans, il faut multiplier par  $1,035^6 \approx 1,229$ , ce qui correspond à une augmentation de 22,9%.
2. À partir de 2008, on modélise la population de cette ville au 1<sup>er</sup> janvier à l'aide d'une suite : pour tout entier naturel  $n$ , on note  $u_n$  le nombre d'habitants, exprimé en centaines de milliers d'habitants, au 1<sup>er</sup> janvier de l'année 2008 +  $n$ .
  - a. Au 1<sup>er</sup> janvier 2008, donc pour  $n = 0$ , la population de la ville était de 100 000 habitants donc une centaine de milliers d'habitants :  $u_0 = 1$ .
  - b. La suite  $(u_n)$  est une suite géométrique de premier terme  $u_0 = 1$  et de raison  $q = 1,035$ ; donc pour tout  $n$ ,  $u_n = u_0 \times q^n = 1 \times 1,035^n = 1,035^n$ .
  - c. La population aura doublé quand elle aura atteint 2 centaines de milliers d'habitants, autrement dit quand  $u_n$  sera supérieur ou égal à 2. On résout l'inéquation  $1,035^n \geq 2$  :
 
$$1,035^n \geq 2 \iff \ln(1,035^n) \geq \ln 2 \quad \text{croissance de la fonction } \ln$$

$$\iff n \times \ln 1,035 \geq \ln 2 \quad \text{propriété de la fonction } \ln$$

$$\iff n \geq \frac{\ln 2}{\ln 1,035} \quad \text{car } \ln 1,035 > 0$$
 Or  $\frac{\ln 2}{\ln 1,035} \approx 20,15$  donc on peut dire que la population aura doublé la 21<sup>e</sup> année, soit en 2008 + 21 = 2029.  
À la calculatrice, on trouve que  $1,035^{20} \approx 1,99 < 2$  et que  $1,035^{21} \approx 2,06 > 2$ .

**Partie B : un second modèle**

On modélise la population de cette ville à partir du 1<sup>er</sup> janvier 2008 par la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$

$$\text{par } f(x) = \frac{3}{1 + 2e^{-0,05x}}$$

Dans l'algorithme proposé dans le texte

- $X$  désigne une variable entière qui représente le nombre d'années écoulées depuis le 1<sup>er</sup> janvier 2008;
- $f(X)$  représente le nombre d'habitants en centaines de milliers.

L'algorithme tourne tant que  $f(X) \leq 2$ , donc il s'arrête dès que  $f(X) > 2$ ; la valeur 28 affichée en sortie de l'algorithme représente donc la première année pour laquelle  $f(X)$  est plus grand que 2, autrement dit la première année pour laquelle la population dépasse 200 000 habitants.

Ce sera en 2008 + 28 donc en 2036 avec ce modèle de développement de population.