∽ Baccalauréat ES/L Métropole 12 septembre 2014 ∾

Corrigé

Exercice 1 — 6 points

Commun à tous les candidats

Avant de réaliser une opération marketing en début de saison, un revendeur de piscines fait une étude dans son fichier client. Il s'intéresse à deux caractéristiques :

- Le type de piscine déjà installée (piscine traditionnelle, piscine en bois, coque en résine) ;
- l'existence d'un système de chauffage.

Il obtient les résultats suivants :

- 50 % des clients choisissent une piscine traditionnelle, et parmi eux, 80 % ont fait installer un système de chauffage ;
- 40 % des clients choisissent une piscine avec coque en résine, dont 60 % seront chauffées ;
- les autres clients ont préféré une piscine en bois.

On choisit au hasard la fiche d'un client dans le fichier informatique du revendeur de piscine, chaque fiche ayant la même probabilité d'être tirée. On note les évènements suivants :

T : « Le client choisit une piscine traditionnelle » ;

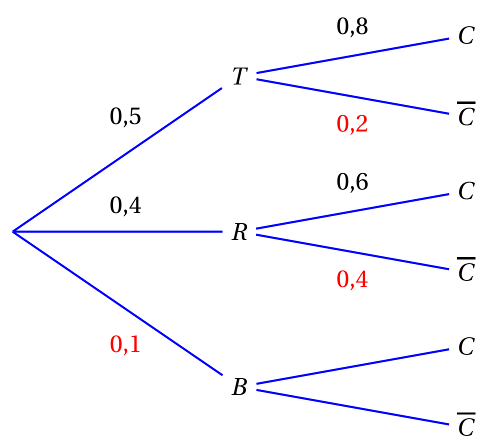
R : « Le client choisit une piscine avec coque en résine » ;

B : « Le client choisit une piscine en bois » ;

C : « Le client fait installer un chauffage ».

Partie A

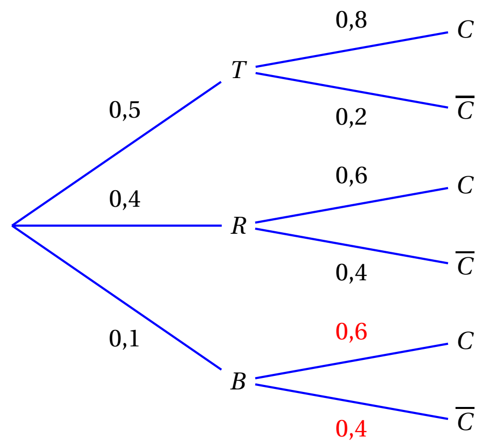
1. D'après le texte, $P(T) = 0{,}5$ et $P(R) = 0{,}4$ donc $P(B) = 1 - 0{,}5 - 0{,}4 = 0{,}1$.
   On peut également dire que $P_T(C) = 0{,}8$ donc $P_T(\overline{C}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.
   De même $P_R(C) = 0{,}6$ donc $P_R(\overline{C}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.
   On construit un arbre pondéré représentant la situation :



2. L'événement « le client choisit une piscine traditionnelle chauffée » est l'événement $T \cap C$.
   $P(T \cap C) = P(T) \times P_T(C) = 0{,}5 \times 0{,}8 = 0{,}4$
3. On sait aussi que 70 % des clients ont choisi de faire installer un chauffage pour leur piscine donc $P(C) = 0{,}7$.

   a. D'après la formule des probabilités totales :
   $P(C) = P(T \cap C) + P(R \cap C) + P(B \cap C)$; or $P(R \cap C) = P(R) \times P_R(C) = 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}24$
   Donc $P(C) = P(T \cap C) + P(R \cap C) + P(B \cap C) \iff 0{,}7 = 0{,}4 + 0{,}24 + P(B \cap C)$
   et donc $P(B \cap C) = 0{,}06$.

b. $P(B \cap C) = P(B) \times P_B(C)$; or $P(B) = 0{,}1$ et $P(B \cap C) = 0{,}06$ donc $0{,}06 = 0{,}1 \times P_B(C)$ ce qui entraine $P_B(C) = 0{,}6$.
$P_B(\overline{C}) = 1 - P_B(C) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$
On peut ainsi compléter l'arbre pondéré :



4. Sachant que la piscine du client dont la fiche a été tirée est chauffée, la probabilité que ce soit une piscine traditionnelle est $P_C(T)$: $P_C(T) = \dfrac{P(C \cap T)}{P(C)} = \dfrac{0{,}4}{0{,}7} = \dfrac{4}{7}$

Partie B

On prélève un lot de 120 fiches dans le fichier client du revendeur.
On s'intéresse, dans un tel lot, au nombre de clients ayant choisi d'installer un chauffage pour leur piscine. On modélise ce nombre par la variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 84$ et d'écart-type $\sigma = 5$.

1. La probabilité qu'il y ait entre 74 et 94 piscines chauffées est $P(74 \leqslant X \leqslant 94)$.
   Or $\mu = 84$ et $\sigma = 5$ donc $74 = \mu - 2\sigma$ et $94 = \mu + 2\sigma$.
   On sait, que si une variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type σ, $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$ donc la probabilité qu'il y ait entre 74 et 94 piscines chauffées est environ de 0,95.
2. Deux tiers de 120 est égal à 80.
   La probabilité qu'au moins deux tiers des clients du lot aient choisi d'installer un chauffage pour leur piscine est $P(X \geqslant 80)$.
   À la calculatrice, on trouve $P(X \geqslant 80) \approx 0{,}79$.

Exercice 2 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et L

On comptait 700 élèves dans un lycée lors de la rentrée de 2012.
À la fin de chaque année scolaire, après le départ des nouveaux bacheliers et des élèves quittant l'établissement, le lycée conserve 70 % de son effectif pour l'année suivante.
Il reçoit 240 nouveaux élèves à chaque rentrée.

1. Il y a 700 élèves à la rentrée 2012 ; le lycée en conserve 70 % soit $700 \times \dfrac{70}{100} = 490$.
   Le lycée reçoit 240 nouveaux élèves : $490 + 240 = 730$.
   Le nombre d'élèves du lycée à la rentrée 2013 est 730.
   Il y a 730 élèves à la rentrée 2013 ; le lycée en conserve 70 % soit $730 \times \dfrac{70}{100} = 511$.
   Le lycée reçoit 240 nouveaux élèves : $511 + 240 = 751$.
   Le nombre d'élèves du lycée à la rentrée 2013 est 751.

2. On définit la suite (a_n) par : $a_0 = 700$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}7 \times a_n + 240$.
Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = a_n - 800$; donc $a_n = u_n + 800$.

a. $u_{n+1} = a_{n+1} - 800 = 0{,}7 \times a_n + 240 - 800 = 0{,}7(u_n + 800) - 560 = 0{,}7 \times u_n + 560 - 560 = 0{,}7 \times u_n$
$u_0 = a_0 - 800 = 700 - 800 = -100$
Donc la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}7$ et de premier terme $u_0 = -100$.

b. La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}7$ et de premier terme $u_0 = -100$ donc, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = -100 \times 0{,}7^n$.

c. $a_n = u_n + 800$ donc $a_n = 800 - 100 \times 0{,}7^n$ pour tout entier naturel n.

3. On choisit de modéliser le nombre d'élèves du lycée par les termes de la suite (a_n).
Il faudra agrandir le lycée dès que l'effectif sera supérieur ou égal à 780 élèves.

a. $$\begin{aligned} 800 - 100 \times 0{,}7^n \geqslant 780 &\iff 800 - 780 \geqslant 100 \times 0{,}7^n \\ &\iff \frac{20}{100} \geqslant 0{,}7^n \\ &\iff 0{,}2 \geqslant 0{,}7^n \\ &\iff 0{,}7^n \leqslant 0{,}2 \end{aligned}$$

b. Il faudra agrandir le lycée quand le nombre d'élèves aura dépassé 780, ce qui revient à résoudre l'inéquation $a_n \geqslant 780$ c'est-à-dire $800 - 100 \times 0{,}7^n \geqslant 780$; d'après la question précédente, cela revient à résoudre l'inéquation $0{,}7^n \leqslant 0{,}2$:

$$\begin{aligned} 0{,}7^n \leqslant 0{,}2 &\iff \ln\left(0{,}7^n\right) \leqslant \ln 0{,}2 && \text{croissance de la fonction ln sur }]\,0\,;+\infty\,[\\ &\iff n \times \ln 0{,}7 \leqslant \ln 0{,}2 && \text{propriété de la fonction ln} \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln 0{,}2}{\ln 0{,}7} && \text{car } \ln 0{,}7 < 0 \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln 0{,}2}{\ln 0{,}7} \approx 4{,}5$ donc $n \geqslant 5$.

$2012 + 5 = 2017$ donc il faudra agrandir le lycée en 2017.

Exercice 2 — 5 points

Pour satisfaire ses adhérents, un club de sport a instauré trois niveaux d'apprentissage :

DÉBUTANT (D), CONFIRMÉ (C) et EXPERT (E).

Au 1er septembre 2012, lors de l'inscription, le club comptait :

30 % de débutants, 50 % de confirmés et 20 % d'experts.

D'une année sur l'autre, on constate que :

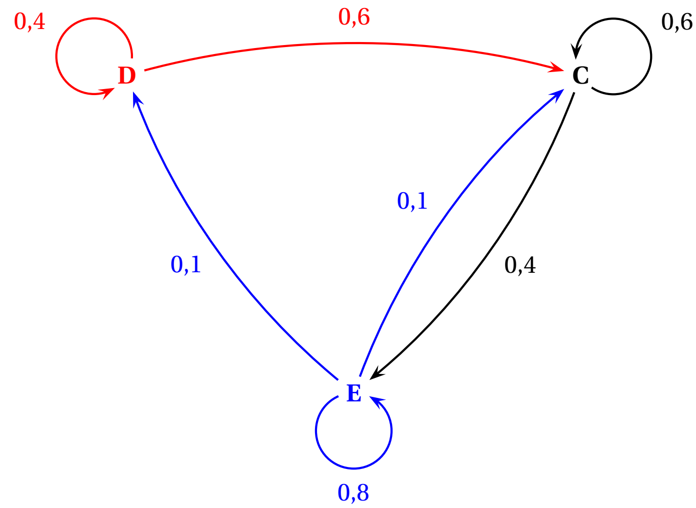
- parmi les adhérents de niveau débutant, 40 % restent à ce niveau et 60 % passent au niveau confirmé ;
- parmi les adhérents de niveau confirmé, 60 % restent à ce niveau et 40 % passent au niveau expert ;
- parmi les adhérents de niveau expert, 80 % restent à ce niveau, 10 % redescendent au niveau confirmé et les autres 10 % préfèrent reprendre les bases au niveau débutant.

On considère qu'il n'y a pas de nouveaux venus ni de départs dans le club.

Soit $P_n = \begin{pmatrix} d_n & e_n & e_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste de la répartition parmi les trois niveaux d'apprentissage D, C et E au 1er septembre de l'année $2012 + n$ pour tout entier naturel n.

1. **a.** $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ puisqu'il y a 30 % de débutants, 50 % de confirmés et 20 % d'experts en 2012 c'est-à-dire quand $n = 0$.

b. On traduit la situation par un graphe probabiliste :



On donne la matrice de transition M, ainsi que M^5 et M^{10}, en respectant l'ordre D, C, E des sommets :

$$M = \begin{pmatrix} 0,4 & \boldsymbol{0,6} & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,1 & \boldsymbol{0,8} \end{pmatrix} \qquad M^5 = \begin{pmatrix} 0,085 & 0,331 & 0,584 \\ 0,097 & 0,293 & 0,610 \\ 0,104 & 0,298 & 0,598 \end{pmatrix} \qquad M^{10} = \begin{pmatrix} 0,100 & 0,299 & 0,601 \\ 0,100 & 0,300 & 0,600 \\ 0,100 & 0,300 & 0,600 \end{pmatrix}$$

2. Dans la matrice M on lit ***0,6*** et ***0,8*** en italique gras.

a. Le nombre 0,6 situé sur la première ligne et la deuxième colonne de la matrice M correspond aux 60 % d'adhérents débutants qui deviennent confirmés l'année suivante.

Le nombre 0,8 situé sur la troisième ligne et la troisième colonne de la matrice M correspond aux 80 % d'adhérents experts qui restent experts l'année suivante.

b. D'après le cours, on peut dire que, pour tout n, $P_{n+1} = P_n \times M$. On a donc :

$$P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0,3 \times 0,4 + 0,5 \times 0 + 0,2 \times 0,1 & 0,3 \times 0,6 + 0,5 \times 0,6 + 0,2 \times 0,1 & 0,3 \times 0 + 0,5 \times 0,4 + 0,2 \times 0,8 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0,14 & 0,5 & 0,36 \end{pmatrix}$$

c. La répartition prévisible des adhérents au 1er septembre 2017 est donnée par P_5 car $2017 = 2012 + 5$.

D'après le cours, on sait que, pour tout n, $P_n = P_0 \times M^n$; donc $P_5 = P_0 \times M^5$.

$$P_5 = P_0 \times M^5 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,085 & 0,331 & 0,584 \\ 0,097 & 0,293 & 0,610 \\ 0,104 & 0,298 & 0,598 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,095 & 0,305 & 0,600 \end{pmatrix}$$

Donc en 2017 il devrait y avoir 9,5 % de débutants, 30,5 % de confirmés et 60,0 % d'experts.

3. a. $$P_{10} = P_0 \times M^{10} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,100 & 0,299 & 0,601 \\ 0,100 & 0,300 & 0,600 \\ 0,100 & 0,300 & 0,600 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,100 & 0,300 & 0,600 \end{pmatrix}$$

On peut conjecturer que la matrice $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$ correspond à l'état probabiliste stable.

b. On vérifie d'abord que $0,1 + 0,3 + 0,6 = 1$ donc la matrice P correspond à un état probabiliste.

La matrice P correspond à l'état probabiliste stable si $\mathrm{P} \times M = \mathrm{P}$.

$$\mathrm{P} \times M = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0,1 \times 0,4 + 0,3 \times 0 + 0,6 \times 0,1 & 0,1 \times 0,6 + 0,3 \times 0,6 + 0,6 \times 0,1 & 0,1 \times 0 + 0,3 \times 0,4 + 0,6 \times 0,8 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix} = \mathrm{P}$$

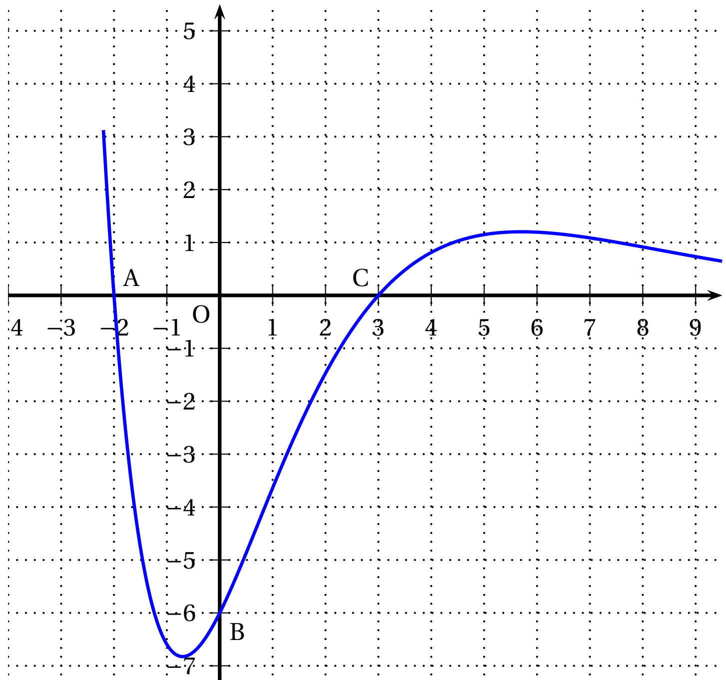
Donc la matrice P correspond à l'état probabiliste stable.

c. On peut conclure qu'à long terme, la répartition dans le club de sport tendra vers 10 % de débutants, 30 % de confirmés et 60 % d'experts.

Exercice 3 — 3 points

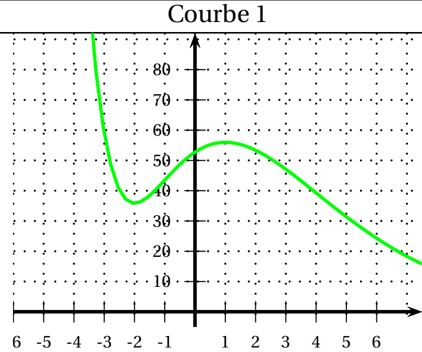
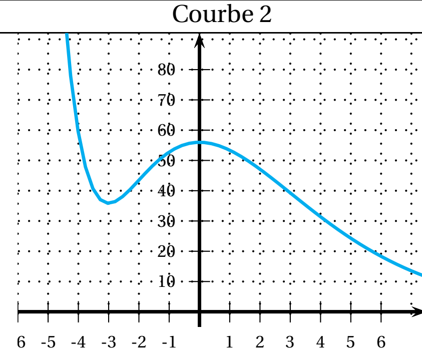
Commun à tous les candidats

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et deux fois dérivable. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, dans un repère orthonormé.
Les points suivants appartiennent à la courbe : A$(-2\,;\,0)$; B$(0\,;\,-6)$ et C$(3\,;\,0)$.



Courbe représentative de la fonction f''

1. La courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion si cette courbe traverse sa tangente, autrement dit si la dérivée seconde de f s'annule et change de signe.
   D'après sa courbe représentative, la fonction f'' s'annule et change de signe en $x=-2$ et $x=3$; donc la courbe représentant la fonction f admet deux points d'inflexion, aux points d'abscisses -2 et 3.
2. Sur l'intervalle $[-2\,;\,3]$, la courbe représentant la fonction f'' est située en dessous de l'axe des abscisses, donc $f'' \leqslant 0$. Cela veut dire que, sur cet intervalle, la fonction dérivée première f' est décroissante, et donc que la fonction f est concave.
3. On donne les deux courbes :

Courbe 1	Courbe 2
	

   La courbe 1 représente une fonction qui admet en $x=-2$ un minimum ; au point d'abscisse -2, la courbe ne traverse pas sa tangente, donc le point d'abscisse -2 n'est pas un point d'inflexion. Donc la courbe 1 ne représente pas la fonction f.
   La fonction f est représentée par la courbe 2.

Exercice 4 — 6 points

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $[0{,}5~;~10]$ par : $f(x) = -x^2 - 4x + 15 + 6\ln(x)$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. $f(x) = -x^2 - 4x + 15 + 6\ln(x)$ donc $f'(x) = -2x - 4 + \dfrac{6}{x} = \dfrac{-2x^2 - 4x + 6}{x}$.
2. Sur $[0{,}5~;~10]$, $x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-2x^2 - 4x + 6$.
   On étudie le signe de $-2x^2 - 4x + 6$ sur $[0{,}5~;~10]$:
   $\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-2) \times 6 = 16 + 48 = 64 = 8^2$; $x' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4-8}{-4} = 1$; $x'' = \dfrac{4+8}{-4} = -3$
   $f(0{,}5) = 12{,}75 + 6\ln 0{,}5 \approx 8{,}6$; $f(1) = 10$; $f(10) = 6\ln 10 - 125 \approx -111{,}2$
   D'où le signe de f' et les variations de f :

x	0,5		1		10
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	10	↘	
	$12{,}75 + 6\ln 0{,}5$				$6\ln 10 - 125$

3. On a vu que $f(0{,}5) > 0$ et que $f(10) < 0$, donc on complète le tableau de variations de f :

x	0,5		1		α		10
$f(x)$		↗	10	↘	0	↘	
	$12{,}75 + 6\ln 0{,}5$						$6\ln 10 - 125$

   D'après ce tableau de variations, on peut dire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $[0{,}5~;~10]$; on l'appelle α.
   $\left.\begin{array}{l} f(3) \approx 0{,}6 > 0 \\ f(4) \approx -8{,}7 < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [3~;4]$; $\left.\begin{array}{l} f(3) \approx 0{,}6 > 0 \\ f(3{,}1) \approx -0{,}22 < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [3{,}0~;3{,}1]$
   $\left.\begin{array}{l} f(3{,}07) \approx 0{,}025 > 0 \\ f(3{,}08) \approx -0{,}057 < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [3{,}07~;3{,}08]$
   Donc α a pour valeur approchée à 10^{-2} par défaut le nombre 3,07.
4. Soit F la fonction définie et dérivable sur $[0{,}5~;~10]$ telle que : $F(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 9x + 6x\ln(x)$.
   La fonction F est une primitive de f si et seulement si $F'(x) = f(x)$ pour tout x de $[0{,}5~;~10]$.
   $F'(x) = -\dfrac{1}{3} \times 3x^2 - 4x + 9 + 6\left(\ln(x) + x \times \dfrac{1}{x}\right) = -x^2 - 4x + 9 + 6\ln(x) + 6 = -x^2 - 4x + 15 + 6\ln(x) = f(x)$
   Donc F est une primitive de f sur $[0{,}5~;~10]$.
5. D'après le cours, $I = \displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = F(3) - F(1) = 18\ln 3 - \dfrac{20}{3}$ dont une valeur approchée au millième est 13,108.
6. La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1~;~3]$ est :
   $\dfrac{1}{3-1}\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\left(18\ln 3 - \dfrac{20}{3}\right) = 9\ln 3 - \dfrac{10}{3} \approx 6{,}554$.