Baccalauréat ES Pondichéry

7 avril 2014 – Corrigé

EXERCICE 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

1. **Proposition fausse.**
   La tangente T, passant par les points A et B d'abscisses distinctes, a pour coefficient directeur :
   $$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-3}{0-(-1)} = \frac{-5}{1} = -5$$
   La droite T est tangente à la courbe représentant la fonction h au point A d'abscisse -1 donc son coefficient directeur est $h'(-1)$.
   Donc $h'(-1) = -5 \neq -2$.
2. **Proposition fausse.**
   Sur l'intervalle $[1;4]$, $f''(x) \leqslant 0$ donc la fonction f est concave sur cet intervalle.
3. **Proposition vraie.**
   $e^{5\ln 2} \times e^{7\ln 4} = \left(e^{\ln 2}\right)^5 \times \left(e^{\ln 4}\right)^7 = 2^5 \times 4^7 = 2^5 \times \left(2^2\right)^7 = 2^5 \times 2^{14} = 2^{5+14} = 2^{19}$
4. **Proposition vraie.**
   La fonction g est positive sur $[1;2]$ donc l'aire du domaine grisé est, en unités d'aires, donnée par : $\displaystyle\int_1^2 g(x)\,dx = G(2) - G(1)$ où G est une primitive de g sur $[1;2]$.
   La courbe représentant la fonction G passe par le point C de coordonnées $(2;5)$ donc $G(2) = 5$; cette courbe passe par le point B de coordonnées $(1;1)$ donc $G(1) = 1$.
   Donc $G(2) - G(1) = 5 - 1 = 4$ et donc l'aire grisée est égale à 4 unités d'aires.

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L

1. On sait que $u_0 = 115$; sur ces 115 oiseaux, 40 % restent présents ce qui en fait $115 \times 0,40 = 46$.
   De plus, 120 nouveaux oiseaux sont accueillis en 2013 donc il y en aura au 1er janvier 2014 : $u_1 = 46 + 120 = 166$.
   De même au 1er janvier de l'année 2015, il y en aura $u_2 = 166 \times 0,4 + 120 \approx 186$.
   Il faut donner les résultats à l'unité près puisqu'il s'agit d'un nombre d'oiseaux.
2. **a.** Parmi les trois algorithmes proposés ci-dessous, seul l'**algorithme 3** permet d'estimer le nombre d'oiseaux présents au 1er janvier de l'année $2013 + n$.

algorithme 1	algorithme 2	algorithme 3
Variables : U est un nombre réel i et N sont des nombres entiers **Début** Saisir une valeur pour N Affecter 115 à U Pour i de 1 à N faire | Affecter $0,6 \times U + 120$ à U Fin Pour Afficher U **Fin**	**Variables :** U est un nombre réel i et N sont des nombres entiers **Début** Saisir une valeur pour N Pour i de 1 à N faire | Affecter 115 à U | Affecter $0,4 \times U + 115$ à U Fin Pour Afficher U **Fin**	**Variables :** U est un nombre réel i et N sont des nombres entiers **Début** Saisir une valeur pour N Affecter 115 à U Pour i de 1 à N faire | Affecter $0,4 \times U + 120$ à U Fin Pour Afficher U **Fin**

   Dans ces trois algorithmes, la variable U contient le nombre d'oiseaux recueillis l'année $2013 + i$, où i est un nombre entier compris entre 1 et N.
   Dans l'algorithme 1, on multiplie le nombre d'oiseaux de l'année $2013 + n$ par 0,6 ce qui revient à en prendre 60 % alors qu'il faut en prendre 40 %.
   Dans l'algorithme 2, on multiplie le nombre d'oiseaux par le bon coefficient 0,4 mais on ajoute chaque année 115 alors qu'il faut ajouter 120 oiseaux, comme le dit le texte.

De plus, dans cet algorithme, il ne faudrait pas mettre l'instruction "Affecter 115 à U" dans la boucle POUR, mais avant d'y entrer.

b. On peut dire que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}4\,u_n + 120$ avec $u_0 = 115$.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 200$.

a. Pour tout n, $v_n = u_n - 200$ donc $u_n = v_n + 200$.
$v_{n+1} = u_{n+1} - 200$; or $u_{n+1} = 0{,}4\,u_n + 120$, donc
$v_{n+1} = 0{,}4\,u_n + 120 - 200 = 0{,}4\,(v_n + 200) - 80 = 0{,}4\,v_n + 80 - 80 = 0{,}4\,v_n$
$v_0 = u_0 - 200 = 115 - 200 = -85$
Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}4$ et de premier terme $v_0 = -85$.

b. On sait que l'expression d'une suite géométrique (v_n) de premier terme v_0 et de raison q est : $v_n = v_0 \times q^n$ pour tout entier n.
Donc $v_n = -85 \times 0{,}4^n$ pour tout entier n.

c. On a vu que, pour tout entier n, $u_n = v_n + 200$; or $v_n = -85 \times 0{,}4^n$, donc pour tout entier naturel n, $u_n = 200 - 85 \times 0{,}4^n$.

d. L'estimation du nombre d'oiseaux l'année $2013 + n$ est $200 - 85 \times 0{,}4^n$.
Le nombre $0{,}4^n$ est positif donc le nombre $200 - 85 \times 0{,}4^n$ est toujours inférieur à 200.
Une capacité d'accueil de 200 oiseaux est donc suffisante pour ce centre.

4. On cherche à calculer le nombre total d'oiseaux présents dans le centre entre le 1er janvier 2013 et le 31 décembre 2018, autrement dit pour n entier entre 0 et 5 puisque $2018 = 2013 + 5$; ce nombre est $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$.
On connaît u_0, u_1 et u_2 ; il reste à calculer u_3, u_4 et u_5 :

$$u_3 = 0{,}4 \times u_2 + 120 = 0{,}4 \times 186 + 120 \approx 194$$
$$u_4 = 0{,}4 \times u_3 + 120 = 0{,}4 \times 194 + 120 \approx 198$$
$$u_5 = 0{,}4 \times u_4 + 120 = 0{,}4 \times 198 + 120 \approx 199$$

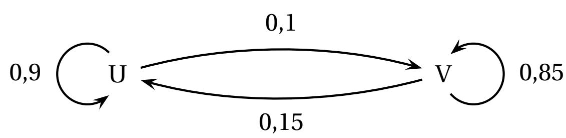
$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 \approx 115 + 166 + 186 + 194 + 198 + 199 = 1\,058$
Entre le 1er janvier 2013 et le 31 décembre 2018, il y aura 1 058 oiseaux présents au centre ; chacun d'eux rapportant 20 €, le montant total de la subvention touchée sera de $1\,058 \times 20 = 21\,160$ euros.

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. On représente la situation par un graphe probabiliste de sommets U et V :



2. Comme un client est soit client de la société U, soit client de la société V, on peut dire que, pour tout entier n, $u_n + v_n = 1$.
$v_0 = 1 - u_0 = 1 - 0{,}45 = 0{,}55$
$u_1 = 0{,}9 \times u_0 + 0{,}15 \times v_0 = 0{,}9 \times 0{,}45 + 0{,}15 \times 0{,}55 = 0{,}485 + 0{,}0825 = 0{,}4875$
$v_1 = 1 - u_1 = 1 - 0{,}4875 = 0{,}5125$
On aurait pu dire aussi que $v_1 = 0{,}1 \times 0{,}45 + 0{,}85 \times 0{,}55 = 0{,}5125$.

3. L'algorithme incomplet donné dans le texte doit donner en sortie les valeurs de u_n et v_n pour un entier naturel n saisi en entrée ; on complète les lignes (L5) et (L8) de cet algorithme :

Variables :	N est un nombre entier naturel non nul	
	U et V sont des nombres réels	
Traitement :	Saisir une valeur pour N	
	Affecter à U la valeur 0,45	
	Affecter à V la valeur **0,55**	
	Pour i allant de 1 jusqu'à N	
	| affecter à U la valeur $0{,}9 \times U + 0{,}15 \times V$	
	| affecter à V la valeur $\mathbf{1 - U}$	
	Fin Pour	
Sortie :	Afficher U et Afficher V	

4. On admet que, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}75\, u_n + 0{,}15$.
On note, pour tout nombre entier naturel n, $w_n = u_n - 0{,}6$.

a. Pour tout entier n, $w_n = u_n - 0{,}6$; donc $u_n = w_n + 0{,}6$.
$w_{n+1} = u_{n+1} - 0{,}6 = 0{,}75\, u_n + 0{,}15 - 0{,}6 = 0{,}75\,(w_n + 0{,}6) - 0{,}45 = 0{,}75\, w_n + 0{,}45 - 0{,}45 = 0{,}75\, w_n$
$w_0 = u_0 - 0{,}6 = 0{,}45 - 0{,}6 = -0{,}15$
Donc la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 0,75 et de premier terme $w_0 = -0{,}15$.

b. La suite (w_n) est géométrique de raison 0,75 ; or $0 < 0{,}75 < 1$, donc la suite (w_n) est convergente et a pour limite 0.
Pour tout n, $u_n = w_n + 0{,}6$ donc, d'après les théorèmes sur les limites de suites, on peut dire que la suite (u_n) est convergente et a pour limite 0,6.
Autrement dit, à long terme, le pourcentage de clients de l'entreprise U tendra vers 60 % et donc celui de l'entreprise V tendra vers 40 %.

Partie B

L'entreprise U fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

Nombre de recharges en milliers	1	3	5
Coût total annuel de production en centaines d'euros	11	27,4	83

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,10]$ par $C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 10$ où a, b et c sont des nombres réels.
Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros.
On admet que le triplet (a,b,c) est solution du système (S).

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{lcl} a+b+c & = & 1\\ 27a+9b+3c & = & 17{,}4\\ 125a+25b+5c & = & 73\end{array}\right. \quad \text{et on pose } X = \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}.$$

1. a. Soit M la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 27 & 9 & 3\\ 123 & 25 & 5\end{pmatrix}$ et Y la matrice $\begin{pmatrix} 1\\ 17{,}4\\ 73\end{pmatrix}$;
alors le système (S) est équivalent à $MX = Y$.

b. On admet que la matrice M est inversible. On appelle M^{-1} la matrice inverse de M.
Alors $MX = Y \iff X = M^{-1}Y$.
En faisant les calculs à la calculatrice, on trouve : $M^{-1}Y = \begin{pmatrix} 0{,}5\\ 0{,}4\\ 0{,}1\end{pmatrix}$; donc $\left\{\begin{array}{l} a = 0{,}5\\ b = 0{,}4\\ c = 0{,}1\end{array}\right.$

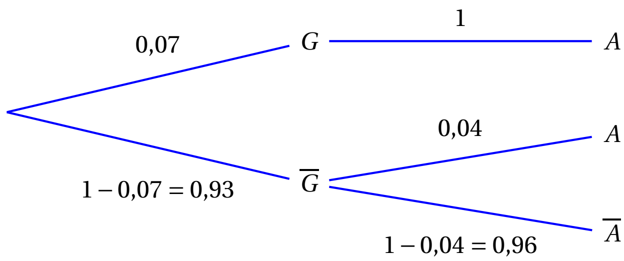
2. En utilisant cette modélisation, le coût total annuel de production pour 8 000 recharges d'eau produites serait $C(8) \times 100$.
On remplace a, b et c respectivement par 0,5 0,4 et 0,1 donc : $C(x) = 0{,}5\, x^3 + 0{,}4\, x^2 + 0{,}1\, x + 10$.
$C(8) = 0{,}5 \times 8^3 + 0{,}4 \times 8^2 + 0{,}1 \times 8 + 10 = 292{,}4$; $292{,}4 \times 100 = 29\,240$
Le coût total annuel de production pour 8 000 recharges est de 29 240 €.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. On complète l'arbre en tenant compte des données fournis dans le texte :



2. D'après la formule des probabilités totales : $p(A) = p(G \cap A) + p(\overline{G} \cap A)$.
$p(G \cap A) = p(G) \times p_G(A) = 0{,}07 \times 1 = 0{,}07$
$p(\overline{G} \cap A) = p(\overline{G}) \times p_{\overline{G}}(A) = 0{,}93 \times 0{,}04 = 0{,}0372$
$p(A) = 0{,}07 + 0{,}0372 = 0{,}1072$
3. La probabilité qu'un salarié ait la grippe sachant qu'il est absent est :
$p_A(G) = \dfrac{p(G \cap A)}{p(A)} = \dfrac{0{,}07}{0{,}1072} \approx 0{,}653.$

Partie B

On admet que le nombre de journées d'absence annuel d'un salarié peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 14$ et d'écart type $\sigma = 3{,}5$.

1. $\mu - 2\sigma = 14 - 2 \times 3{,}5 = 7$ et $\mu + 2\sigma = 14 + 2 \times 3{,}5 = 21$
On sait que si une variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne μ et d'écart type σ que : $p(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$; comme la variable aléatoire X suit la loi normale de paramètres $\mu = 14$ et $\sigma = 3{,}5$, on peut dire que $p(7 \leqslant X \leqslant 21) \approx 0{,}95$.
2. La probabilité qu'un salarié comptabilise au moins 10 journées d'absence dans l'année est $p(X \geqslant 10)$. À la calculatrice, on trouve $p(X \geqslant 10) \approx 0{,}873$.

Partie C

Pour une proportion p et un échantillon de taille n, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est :

$$\left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

L'échantillon de l'enquête est de taille $n = 200$ et la mutuelle déclare que 22 % de ses adhérents ont dépassé 20 journées d'absence au travail donc $p = 0{,}22$.
Comme $n = 200$, $np = 200 \times 0{,}22 = 44$ et $n \times (1 - p) = 200 \times 0{,}78 = 156$, les conditions pour utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique sont réunies.

L'intervalle est alors : $I = \left[0{,}22 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}22(1-0{,}22)}}{\sqrt{200}}\,;0{,}22 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}22(1-0{,}22)}}{\sqrt{200}}\right] \approx [0{,}16\,;0{,}28]$.

L'enquête a montré que 28 personnes ont comptabilisé plus de 20 journées d'absence, ce qui fait une proportion de $\dfrac{28}{200} = 0{,}14$; or $0{,}14 \notin I$ donc on peut penser que le résultat de l'enquête remet en question l'affirmation de la mutuelle.

Exercice 4 — 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. **a.** La droite D passe par le point de coordonnées $(1;10)$; 1 représente 100 litres et 10 représentent 1 000 euros. Donc la vente de 100 litres de sorbet rapporte 1 000 euros.

   b. La droite D passe par l'origine donc représente une fonction linéaire r avec $r(x) = ax$.
   Cette droite passe par le point de coordonnées $(1;10)$ donc $r(1) = 10 \iff a = 10$.
   Donc $r(x) = 10x$.

   c. Pour que l'entreprise réalise un bénéfice, il faut que la droite D représentant la recette soit au dessus de la courbe $\mathscr{C}$ représentant le coût ; la droite et la courbe se coupent au point d'abscisse 1. Il faut donc que $x > 1$ pour réaliser un bénéfice, donc que l'artisan produise au moins 100 litres de sorbet.

2. On admet que $\displaystyle\int_1^3 20x\ln x\,\mathrm{d}x = 90\ln 3 - 40$.

   a. $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \left(10x^2 - 20x\ln x\right)\mathrm{d}x = \int_1^3 10x^2\,\mathrm{d}x - \int_1^3 20x\ln x\,\mathrm{d}x$

   La fonction $x \longmapsto 10x^2$ a pour primitive $x \longmapsto 10\dfrac{x^3}{3}$ donc

   $\displaystyle\int_1^3 10x^2\,\mathrm{d}x = \left[10\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \left(10\times\frac{27}{3}\right) - \left(10\times\frac{1}{3}\right) = \frac{260}{3}$

   $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{260}{3} - (90\ln 3 - 40) = \frac{260}{3} - 90\ln 3 + 40 = \frac{380}{3} - 90\ln 3$

   b. La valeur moyenne de la fonction f entre 1 et 3 est $\displaystyle\frac{1}{3-1}\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x \approx 13{,}90$.

   Donc pour une production comprise entre 100 et 300 litres, la valeur moyenne du coût total de production est égale à 1 390 euros.

Partie B

On note $B(x)$ le bénéfice réalisé par l'artisan pour la vente de x centaines de litres de sorbet produits. D'après les données précédentes, pour tout x de l'intervalle $[1~;~3]$, on a : $B(x) = -10x^2 + 10x + 20x\ln x$ où $B(x)$ est exprimé en centaines d'euros.

1. On note B' la fonction dérivée de la fonction B ; $B(x) = -10x^2 + 10x + 20x\ln x$ donc
   $B'(x) = -20x + 10 + 20\left(1\times\ln x + x\times\dfrac{1}{x}\right) = -20x + 10 + 20\ln x + 20 = -20x + 20\ln x + 30$.

2. On donne le tableau de variation de la fonction dérivée B' sur l'intervalle $[1~;~3]$:

x	1	3
$B'(x)$	$B'(1)$ ↘	$B'(3)$

   a. $B'(1) = 10 > 0$ et $B'(3) \approx -8 < 0$ donc $B'(1) > 0 > B'(3)$.
   On complète le tableau de variations de B' sur $[1;3]$:

x	1	α	3
$B'(x)$	$B'(1)$ ↘	0 ↘	$B'(3)$

D'après ce tableau de variations, on peut dire que l'équation $B'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1;3]$.

$$\left.\begin{array}{l}B'(2) \approx 3{,}9 > 0\\ B'(3) \approx -8 < 0\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \in [2;3]$$

$$\left.\begin{array}{l}B'(2{,}3) \approx 0{,}7 > 0\\ B'(2{,}4) \approx -0{,}5 < 0\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \in [2{,}3;2{,}4]$$

$$\left.\begin{array}{l}B'(2{,}35) \approx 0{,}09 > 0\\ B'(2{,}36) \approx -0{,}03 < 0\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \in [2{,}35;2{,}36]$$

Donc $\alpha \approx 2{,}35$.

b. D'après la question précédente :
- $B'(x) > 0$ sur $[1;\alpha[$;
- $B'(\alpha) = 0$;
- $B'(x) < 0$ sur $]\alpha;3]$.

S'il n'y a aucune production, il n'y a pas de bénéfice donc $B(1) = 0$; $B(3) \approx 5{,}92$.

D'où le tableau de variations de la fonction B sur $[1;3]$:

x	1		α		3
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$	0	$\nearrow$	$B(\alpha)$	$\searrow$	$5{,}92$

3. Le bénéfice maximum est obtenu pour $x = \alpha$ avec $\alpha \in [2{,}35;2{,}36]$.

À la calculatrice on obtient $B(2{,}35) \approx 8{,}4325$ et $B(2{,}36) \approx 8{,}4328$, correspondant respectivement à des bénéfices de 843,25 € et de 843,28 €.

Il ne semble donc pas envisageable d'atteindre un bénéfice d'au moins 850 €.