Corrigé du baccalauréat ES/L – Amérique du Sud
25 novembre 2015

EXERCICE 1 — Commun à tous les candidats — 5 points

Une étude est menée par une association de lutte contre la violence routière. Des observateurs, sur un boulevard d'une grande ville, se sont intéressés au comportement des conducteurs d'automobile au moment de franchir un feu tricolore.

Partie A

Sur un cycle de deux minutes (120 secondes), le feu est à la couleur « rouge » pendant 42 secondes, « orange » pendant 6 secondes et « vert » pendant 72 secondes.
Par ailleurs, les observateurs notent que les comportements diffèrent selon la couleur du feu :

- lorsque le feu est rouge, 10 % des conducteurs continuent de rouler et les autres s'arrêtent;
- lorsque le feu est orange, 86 % des conducteurs continuent de rouler et les autres s'arrêtent;
- lorsque le feu est vert, tous les conducteurs continuent de rouler.

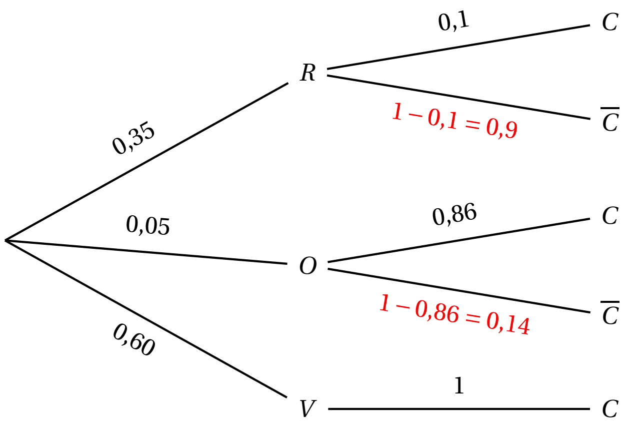
On s'intéresse à un conducteur pris au hasard, et on observe son comportement selon la couleur du feu.
On note :

- R l'évènement « le feu est au rouge »;
- O l'évènement « le feu est à l'orange »;
- V l'évènement « le feu est au vert »;
- C l'évènement « le conducteur continue de rouler ».

D'après ce qui est dit dans le texte : $p(R) = \dfrac{42}{120} = 0{,}35$, $p(O) = \dfrac{6}{120} = 0{,}05$ et $p(V) = \dfrac{72}{120} = 0{,}6$

De plus : $P_R(C) = 0{,}1$, $p_O(C) = 0{,}86$ et $p_V(C) = 1$

1. On modélise cette situation par un arbre pondéré :



2. La probabilité que le conducteur continue de rouler est $p(C)$.
D'après la formule des probabilités totales :
$p(C) = p(R \cap C) + p(O \cap C) + p(V \cap C) = p(R) \times p_R(C) + p(O) \times p_O(C) + p(V) \times p_V(C)$
$\quad = 0{,}35 \times 0{,}1 + 0{,}05 \times 0{,}86 + 0{,}6 \times 1 = 0{,}678$

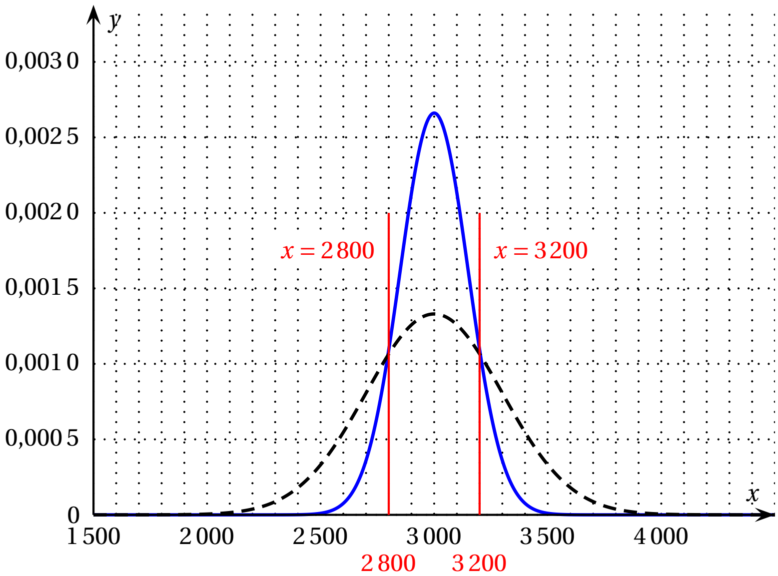
3. Sachant qu'un conducteur continue de rouler au feu, la probabilité que le feu soit vert est $p_C(V)$:
$p_C(V) = \dfrac{p(V \cap C)}{p(C)} = \dfrac{0{,}6 \times 1}{0{,}678} \approx 0{,}885$

Partie B

On désigne par X la variable aléatoire qui compte le nombre de voitures par heure à proximité du feu évoqué dans la partie A. On admet que X suit la loi normale de moyenne 3 000 et d'écart type 150.

1. À l'aide de la calculatrice, on détermine la probabilité de compter entre 2 800 et 3 200 voitures par heure à cet endroit, c'est-à-dire $p(2800 \leqslant X \leqslant 3200)$; on trouve approximativement 0,818.
2. À l'aide de la calculatrice, on détermine la probabilité de compter plus de 3 100 voitures par heure à cet endroit, c'est-à-dire $p(X \geqslant 3100)$; on trouve approximativement 0,252.
3. À un autre endroit du boulevard, à proximité d'un pont, la variable aléatoire Y qui compte le nombre de voitures par heure suit la loi normale de moyenne 3 000 et d'écart type σ strictement supérieur à 150.

   Sur le graphique ci-dessous, la courbe correspondant à X est en traits pleins et la courbe correspondant à Y est en pointillés.



   On trace les droites d'équations $x = 2800$ et $x = 3200$; elles semblent couper les deux courbes en leurs points d'intersection.

   D'après le cours :

   - $p(2800 \leqslant X \leqslant 3200$ est l'aire $\mathscr{A}_1$ de l'ensemble des points compris entre la courbe en traits pleins, l'axe des abscisses et les deux droites verticales tracées ;
   - $p(2800 \leqslant Y \leqslant 3200$ est l'aire $\mathscr{A}_2$ de l'ensemble des points compris entre la courbe en pointillés, l'axe des abscisses et les deux droites verticales tracées.

   Graphiquement, $\mathscr{A}_1 > \mathscr{A}_2$, donc la probabilité qu'il passe en une heure, entre 2 800 et 3 200 voitures, est plus grande pour le lieu correspondant à l'aire $\mathscr{A}_1$, donc à proximité du feu.

EXERCICE 2 — Commun à tous les candidats — 6 points

Partie A

La fonction f est définie pour tout réel x élément de l'intervalle $[1\,;7]$ par : $f(x) = 1{,}5x^3 - 9x^2 + 24x + 48$
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' sa dérivée seconde sur $[1\,;7]$.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;7]$:
   a. $f'(x) = 1{,}5 \times 3x^2 - 9 \times 2x + 24 = 4{,}5x^2 - 18x + 24$
   b. $f''(x) = 4{,}5 \times 2x - 18 = 9x - 18$
2. La fonction f est convexe sur les intervalles sur lesquels sa dérivée première f' est croissante, c'est-à-dire sur lesquels sa dérivée seconde f'' est positive.
   $f''(x) \geqslant 0 \iff 9x - 18 \geqslant 0 \iff 9x \geqslant 18 \iff x \geqslant 2$
   La fonction f est convexe sur l'intervalle $[2\,;\,7]$.

Partie B

Une entreprise fabrique et commercialise un article dont la production est comprise entre 1 000 et 7 000 articles par semaine. On modélise le coût de fabrication, exprimé en milliers d'euros, par la fonction f définie dans la partie A où x désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués.
On note c la fonction définie sur $[1;\,7]$ représentant le coût moyen par article fabriqué, exprimé en euros. On a, par conséquent, pour tout x de $[1\,;7]$: $c(x) = \dfrac{f(x)}{x} = 1{,}5x^2 - 9x + 24 + \dfrac{48}{x}$
On admet que la fonction c est dérivable sur $[1\,;7]$. On note c' sa fonction dérivée.

1. $c'(x) = 1{,}5 \times 2x - 9 + 0 + 48 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 3x - 9 - \dfrac{48}{x^2} = \dfrac{3x^3 - 9x^2 - 48}{x^2}$
   $\dfrac{3(x-4)\left(x^2+x+4\right)}{x^2} = \dfrac{3(x^3 + x^2 + 4x - 4x^2 - 4x - 16)}{x^2} = \dfrac{3(x^3 - 3x^2 - 16)}{x^2} = \dfrac{3x^3 - 9x^2 - 48}{x^2}$
   Donc, pour tout x de $[1\,;7]$, $c'(x) = \dfrac{3(x-4)\left(x^2+x+4\right)}{x^2}$
2. **a.** On cherche le signe de $c'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;7]$.
   - signe de $x-4$: $x-4>0$ pour $x>4$ donc sur $]4\,;7]$
   - signe de x^2+x+4 : $\Delta = 1 - 16 = -15 < 0$ donc $x^2+x+4>0$ pour tout x.

   $c(1) = 64{,}5$, $c(4) = 24$ et $c(7) \approx 41{,}4$
   D'où le tableau de variation de la fonction c sur $[1\,;7]$:

x	1		4		7
$x-4$		$-$	0	$+$	
x^2+x+4		$+$		$+$	
x^2		$+$		$+$	
$c'(x)$		$-$	0	$+$	
$c(x)$	64,5	↘	24	↗	41,4

   b. Le minimum de la fonction c est atteint pour $x = 4$ donc pour 4 000 articles à fabriquer ; le coût moyen par article est alors de $c(4) = 24$ soit 24 euros.

3. On considère la fonction Γ définie sur l'intervalle $[1;7]$ par : $\Gamma(x) = 0{,}5x^3 - 4{,}5x^2 + 24x + 1 + 48\ln x$

a. La fonction Γ est dérivable sur $[1;7]$ et

$\Gamma'(x) = 0{,}5\times 3x^2 - 4{,}5\times 2x + 24 + 0 + 48\times\dfrac{1}{x} = 1{,}5x^2 - 9x + 24 + \dfrac{48}{x} = c(x)$

Donc la fonction Γ est une primitive de la fonction c sur $[1;7]$.

b. La valeur moyenne de la fonction c sur $[1;7]$ est $M = \dfrac{1}{7-1}\displaystyle\int_1^7 c(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{6}\displaystyle\int_1^7 c(x)\,\mathrm{d}x$

Or Γ est une primitive de c sur $[1;7]$ donc

$$\begin{aligned}\int_1^7 c(x)\,\mathrm{d}x &= \Gamma(7) - \Gamma(1) = (0{,}5\times 343 - 4{,}5\times 49 + 24\times 7 + 1 + 48\times\ln 7) - (0{,}5 - 4{,}5 + 24 + 1 + 0)\\ &= (120 + 48\ln 7) - 21 = 99 + 48\ln 7\end{aligned}$$

La valeur moyenne est donc $M = \dfrac{99+48\ln 7}{6} \approx 32{,}07$.

EXERCICE 3 — Candidats de ES n'ayant pas suivi la spécialité, et candidats de L — 5 points

Claudine est une passionnée de lecture abonnée à l'hebdomadaire littéraire « La Lecture ». Elle se rend une fois par semaine à la bibliothèque et elle demande ou non l'avis du bibliothécaire sur le livre mis en valeur dans l'hebdomadaire « La Lecture ». Son souhait de demander un avis change d'une semaine sur l'autre selon le plaisir qu'elle a eu à lire le livre et selon la pertinence du conseil donné par le bibliothécaire la semaine précédente.

La première semaine, on suppose que la probabilité que Claudine demande un avis vaut 0,1.

Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note a_n la probabilité que Claudine demande un avis la n-ième semaine. On a ainsi $a_1 = 0{,}1$.

On admet que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on a : $a_{n+1} = 0{,}5a_n + 0{,}4$.

1. $a_2 = 0{,}5a_1 + 0{,}4 = 0{,}5\times 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}45$

La probabilité que Claudine demande un avis la deuxième semaine est égale à 0,45.

2. Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on définit la suite (v_n) par : $v_n = a_n - 0{,}8$.

a. Pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = a_n - 0{,}8$ donc $a_n = v_n + 0{,}8$.

- $v_{n+1} = a_{n+1} - 0{,}8 = 0{,}5a_n + 0{,}4 - 0{,}8 = 0{,}5(v_n + 0{,}8) - 0{,}4 = 0{,}5v_n + 0{,}4 - 0{,}4 = 0{,}5v_n$
- $v_1 = a_1 - 0{,}8 = 0{,}1 - 0{,}8 = -0{,}7$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}5$ et de premier terme $v_1 = -0{,}7$.

b. La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}5$ et de premier terme $v_1 = -0{,}7$ donc, d'après le cours, pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = v_1\times q^{n-1} = -0{,}7\times 0{,}5^{n-1}$.

Comme $u_n = v_n + 0{,}8$, on en déduit que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 0{,}8 - 0{,}7\times 0{,}5^{n-1}$.

c. La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}5$; or $0 < 0{,}5 < 1$ donc la suite (v_n) est convergente et a pour limite 0.

d. $\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0\\ a_n = v_n + 0{,}8\end{array}\right\} \Longrightarrow \displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0{,}8$

Cela signifie que, quand le nombre de semaines deviendra très grand, Claudine va demander un avis 8 fois sur 10.

3. On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES :	A est un réel N est un entier naturel L est un réel strictement compris entre 0,1 et 0,8
INITIALISATION :	A prend la valeur 0,1 N prend la valeur 1
TRAITEMENT :	Tant que $A \leqslant L$ N prend la valeur $N+1$ A prend la valeur $0,5 \times A + 0,4$ Fin du Tant que
SORTIE :	Afficher N

a. Pour la valeur $L = 0,7$, on complète les colonnes du tableau suivant :

Valeur de N	1	2	3	4
Valeur de A	0,1	0,45	0,625	0,7125
Condition $A \leqslant L$	vraie	vraie	vraie	fausse

b. L'affichage de N obtenu en sortie d'algorithme quand la valeur de L est 0,7 est donc 4.

c. Le nombre N obtenu par l'algorithme quand le nombre L est compris entre 0,1 et 0,8 est le nombre de semaines à partir duquel la probabilité que Claudine demande un avis est supérieur à L.

On cherche n tel que $a_n > 0,799$:

$$\begin{aligned}
a_n > 0,799 \iff 0,8 - 0,7 \times 0,5^{n-1} &> 0,799\\
\iff 0,001 &> 0,7 \times 0,5^{n-1}\\
\iff \frac{0,001}{0,7} &> 0,5^{n-1}\\
\iff \ln\left(\frac{0,001}{0,7}\right) &> \ln\left(0,5^{n-1}\right) \quad \text{croissance de la fonction ln}\\
\iff \ln\left(\frac{0,001}{0,7}\right) &> (n-1)\ln 0,5 \quad \text{propriété de la fonction ln}\\
\iff \frac{\ln\left(\frac{0,001}{0,7}\right)}{\ln 0,5} &< n-1 \quad \text{car } \ln 0,5 < 0\\
\iff \frac{\ln\left(\frac{0,001}{0,7}\right)}{\ln 0,5} + 1 &< n
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{0,001}{0,7}\right)}{\ln 0,5} + 1 \approx 10,5$ donc le nombre de semaines à partir duquel la probabilité que Claudine demande un avis est supérieur à 0,799 est 11.

EXERCICE 3 Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

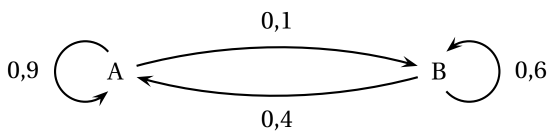
Claudine est une passionnée de lecture abonnée à l'hebdomadaire littéraire « La Lecture ». Elle se rend une fois par semaine à la bibliothèque et demande ou non l'avis de la bibliothécaire sur le livre mis en valeur dans l'hebdomadaire « La Lecture ».
Lorsque Claudine demande à la bibliothécaire son avis, la probabilité qu'elle le demande de nouveau la semaine suivante est 0,9.

Lorsque Claudine ne demande pas à la bibliothécaire son avis, la probabilité qu'elle ne le demande pas non plus la semaine suivante est 0,6.
La première semaine, on suppose que la probabilité que Claudine demande un avis vaut 0,1.
Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note :

- a_n la probabilité que Claudine demande un avis à la bibliothécaire la n-ième semaine ;
- b_n, la probabilité que Claudine ne demande pas d'avis à la bibliothécaire la n-ième semaine ;
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste la n-ième semaine.

On a ainsi $a_1 = 0{,}1$ et $b_1 = 0{,}9$ et donc $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$.

1. a. On illustrer la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B :



b. D'après le texte, on a : $\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 0{,}9a_n + 0{,}4b_n \\ b_{n+1} & = & 0{,}1a_n + 0{,}6b_n \end{array}\right.$

ce qui donne sous forme matricielle : $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$

Donc la matrice de transition de ce graphe est $M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$

2. $P_2 = P_1M = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1 \times 0{,}9 + 0{,}9 \times 0{,}4 & 0{,}1 \times 0{,}1 + 0{,}9 \times 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}45 & 0{,}55 \end{pmatrix}$

3. a. L'état stable est l'état $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ tel que $\left\{\begin{array}{l} a + b = 1 \\ PM = P \end{array}\right.$

$$PM = P \iff \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0{,}9a + 0{,}4b & 0{,}1a + 0{,}6b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 0{,}9a + 0{,}4b & = & a \\ 0{,}1a + 0{,}6b & = & b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -0{,}1a + 0{,}4b & = & 0 \\ 0{,}1a - 0{,}4b & = & 0 \end{array}\right. \iff a - 4b = 0$$

Donc $\left\{\begin{array}{l} a + b = 1 \\ PM = P \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a + b & = & 1 \\ a - 4b & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a + b & = & 1 \\ 5b & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 0{,}8 \\ b & = & 0{,}2 \end{array}\right.$

L'état stable est donc $P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

b. Si la répartition est de 80 % - 20 % pour les états A et B la semaine n, cette répartition restera la même la semaine $n+1$ et toutes les suivantes.

4. On admet que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on a : $a_{n+1} = 0{,}5a_n + 0{,}4$.
On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES :	A est un réel et N est un entier naturel
INITIALISATION :	A prend la valeur 0,1 N prend la valeur 1

TRAITEMENT :	Tant que $A \leqslant 0{,}79$
	    N prend la valeur $N+1$
	    A prend la valeur $0{,}5 \times A + 0{,}4$
	Fin du Tant que

SORTIE :	Afficher N

Dans cet algorithme, la variable A désigne le terme a_n dont le rang est donné par N.
Cet algorithme permet d'obtenir, si elle existe, la première valeur de n pour laquelle a_n est strictement supérieur à 0,79.

5. On admet que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on a : $a_n = 0,8 - 0,7 \times 0,5^{n-1}$.

On cherche n tel que $a_n > 0,799$:

$$\begin{array}{rcrcll}
a_n > 0,799 & \iff & 0,8 - 0,7 \times 0,5^{n-1} & > & 0,799 & \\
& \iff & 0,001 & > & 0,7 \times 0,5^{n-1} & \\
& \iff & \dfrac{0,001}{0,7} & > & 0,5^{n-1} & \\
& \iff & \ln\left(\dfrac{0,001}{0,7}\right) & > & \ln\left(0,5^{n-1}\right) & \text{croissance de la fonction ln} \\
& \iff & \ln\left(\dfrac{0,001}{0,7}\right) & > & (n-1)\ln 0,5 & \text{propriété de la fonction ln} \\
& \iff & \dfrac{\ln\left(\dfrac{0,001}{0,7}\right)}{\ln 0,5} & < & n-1 & \text{car } \ln 0,5 < 0 \\
& \iff & \dfrac{\ln\left(\dfrac{0,001}{0,7}\right)}{\ln 0,5} + 1 & < & n &
\end{array}$$

Or $\dfrac{\ln\left(\dfrac{0,001}{0,7}\right)}{\ln 0,5} + 1 \approx 10,5$ donc le nombre de semaines à partir duquel la probabilité que Claudine demande un avis est supérieur à 0,799 est 11.

EXERCICE 4 — Commun à tous les candidats — 4 points

Pour la fête du village de Boisjoli, le maire a invité les enfants des villages voisins.
Les services de la mairie ayant géré les inscriptions dénombrent 400 enfants à cette fête; ils indiquent aussi que 32 % des enfants présents sont des enfants qui habitent le village de Boisjoli.

1. Le nombre d'enfants issus des villages voisins est :

a. 128 $\boxed{\textbf{b. } 272}$ **c.** 303 **d.** 368

Il y a 32 % d'enfants de Boisjoli, donc 68 % d'enfants des villages voisins; $\dfrac{68}{100} \times 400 = 272$.

Lors de cette fête, huit enfants sont choisis au hasard afin de former une équipe qui participera à un défi sportif. On admet que le nombre d'enfants est suffisamment grand pour que cette situation puisse être assimilée à un tirage au hasard avec remise.
On appelle X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre d'enfants de l'équipe habitant le village de Boisjoli.

2. La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres :

a. $n = 400$ et $p = 0,32$ $\boxed{\textbf{b. } n = 8 \text{ et } p = 0,32}$
c. $n = 400$ et $p = 8$ **d.** $n = 8$ et $p = 0,68$

La probabilité qu'un enfant soit de Boisjoli est de 0,32 puisqu'il y a 32 % d'enfants de ce village.
On choisit 8 enfants donc $n = 8$.

3. La probabilité que dans l'équipe il y ait au moins un enfant habitant le village de Boisjoli est :

a. 0,125 **b.** 0,875 $\boxed{\textbf{c. } 0,954}$ **d.** 1

On cherche $P(X \geqslant 1)$ c'est-à-dire $1 - P(X = 0) = 1 - (1 - 0,32)^8 \approx 0,954$.

4. L'espérance mathématique de X est :

a. 1,740 8 $\boxed{\textbf{b.}\ 2{,}56}$ **c.** 87,04 **d.** 128

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ est $E(X) = np = 8 \times 0{,}32 = 2{,}56$.