

Correction du Baccalauréat ES/L Liban 27 mai 2015

EXERCICE 1
Commun à tous les candidats

5 points

1. On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3; 1]$.

| | | | | | |
|-------------------|----|----|----|----------|---|
| x | -3 | -1 | 0 | α | 1 |
| Variations de f | -6 | -1 | -2 | 0 | 4 |

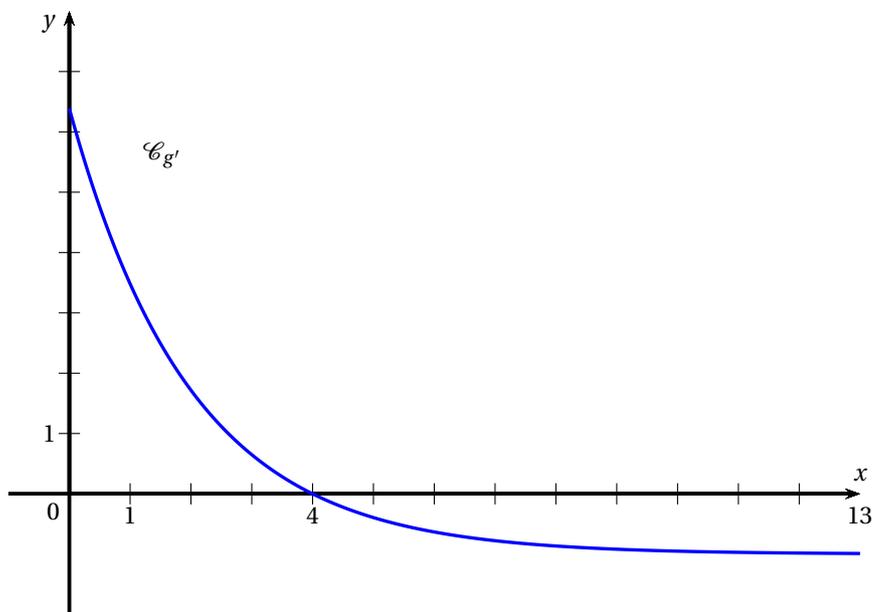
- Sur l'intervalle $[-3; 0]$, f admet un maximum -1 qui est atteint pour $x = -1$, $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cette intervalle.
- Sur l'intervalle $[0; 1]$, f est continue et strictement croissante de plus 0 est compris entre $f(0)$ et $f(1)$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie de la fonction $f(x) = 0$ admet une solution unique sur cet intervalle. On l'appellera α .

En conséquence, $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $[-3; 1]$.

La proposition 1 est donc vraie.

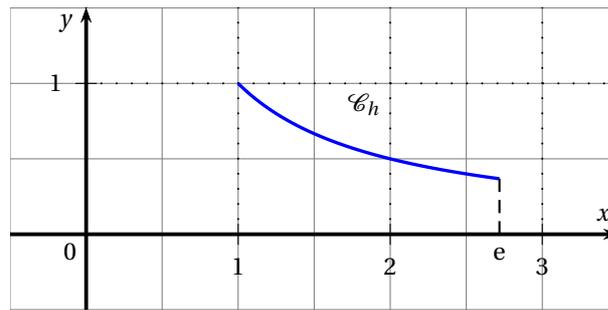
2. Par lecture graphique : $g'(x) \geq 0$ sur l'intervalle $[0; 4]$, la fonction g est donc croissante sur cet intervalle.

La proposition 2 est fausse.



Comme g' est décroissante sur l'intervalle $[0; 13]$, g est concave sur cet intervalle, **la proposition 3 est donc vraie.**

3. On a :



- $h(x) \geq 0$
- h est continue sur l'intervalle $[1; e]$.
- une primitive de h vaut : $H(x) = \ln x$. Et $\int_1^e \frac{1}{x} dx = [H(x)]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$

La fonction h est bien une fonction de densité.

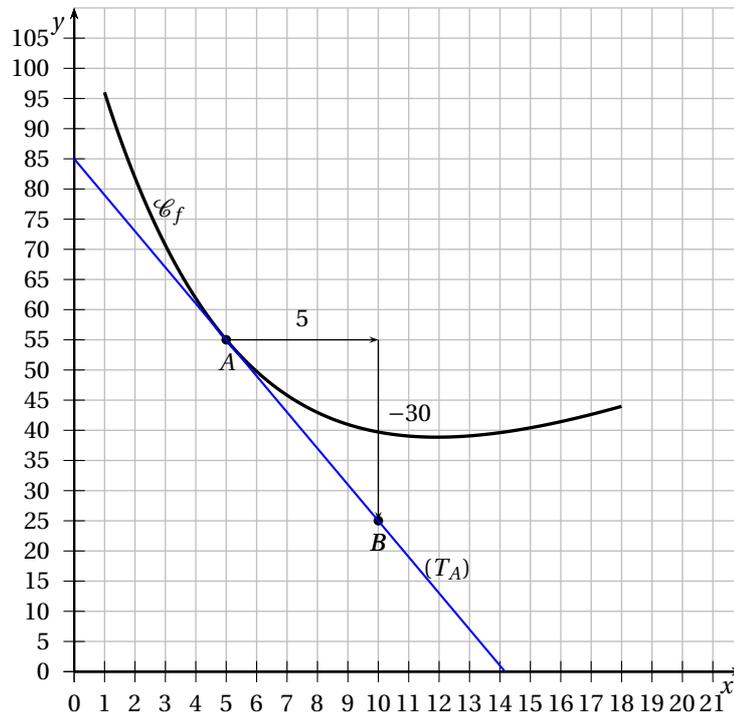
La proposition 4 est donc vraie.

EXERCICE 2

5 points

Commun à tous les candidats

1. a. $f'(5)$ correspond au coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse A , c'est donc le coefficient directeur de la droite (AB) .



Nous pouvons le lire graphiquement, voir ci-dessus.

Nous pouvons le calculer, $A(5; 55)$ et $B(10; 25)$, le coefficient directeur de la droite (AB) vaut :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{25 - 55}{10 - 5} = -\frac{30}{5} = -6.$$

- b. f est dérivable en tant que somme de fonctions dérivables sur $[1; 18]$.

$$f'(x) = 2 + 40 \times \underbrace{(-0,2)}_{u'} \times \overbrace{e^{-0,2x+1}}^u = 2 - 8e^{-0,2x+1}$$

c. $f'(5) = 2 - 8e^{-0,2 \times 5 + 1} = 2 - 8e^0 = 2 - 8 = -6$, on retrouve bien le résultat de la partie 1.a.

2. a. Ici, nous travaillons avec des expressions qui sont définies sur tout \mathbb{R} , les équivalences seront toujours vraies.

$$\begin{aligned} 2 - 8e^{-0,2x+1} \geq 0 &\Leftrightarrow -8e^{-0,2x+1} \geq -2 \\ &\Leftrightarrow e^{-0,2x+1} \leq \frac{-2}{-8} \\ &\Leftrightarrow \ln e^{-0,2x+1} \leq \ln \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow -0,2x + 1 \leq -\ln 4 \\ &\Leftrightarrow -0,2x \leq -\ln 4 - 1 \\ &\Leftrightarrow -5 \times (-0,2x) \geq -5 \times (-\ln 4 - 1) \\ &\Leftrightarrow x \geq 5\ln 4 + 5 \end{aligned}$$

b. Dans un premier temps, on constate que : $5\ln 4 + 5 \approx 11,93$ qui est bien compris dans $[1; 18]$.

| x | 1 | $5\ln 4 + 5$ | 18 |
|--------------------|--------|-----------------|---------|
| $2 - 8e^{-0,2x+1}$ | - | 0 | + |
| $f'(x)$ | - | 0 | + |
| f | $f(1)$ | $f(5\ln 4 + 5)$ | $f(18)$ |

Et : $f(5\ln 4 + 5) \approx 38,86$, $f(1) \approx 96,02$ et $f(18) \approx 43,97$.

3. Par le calcul, le nombre de parasols que doit produire l'entreprise pour que le coût de fabrication unitaire soit minimal est à choisir parmi $f(11) \approx 39,05$ ou $f(12) \approx 38,86$, le coût sera donc minimal pour 12 parasols.

4. a. Il suffit de dériver F ,

$$F'(x) = 2x + 5 - 200e^{-0,2x+1} \times (-0,2) = 2x + 5 + 40e^{-0,2x+1} = f(x).$$

F est bien une primitive de f .

$$\begin{aligned} \text{b. } I &= \int_5^{15} f(x) dx = [F(x)]_5^{15} = F(15) - F(5) = 15^2 + 5 \times 15 - 200e^{-3+1} - (5^2 + 5 \times 5 - 200e^{-1+1}) \\ &= 300 - 200e^{-2} - (-150) = 450 - 200e^{-2} \end{aligned}$$

c. Rappel : la valeur moyenne de f sur $[a; b]$ vaut : $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

$$\text{ici : } \frac{1}{10} I = \frac{1}{15-5} \int_5^{15} f(x) dx.$$

C'est le calcul de la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[5; 15]$ et cette valeur moyenne vaut :

$$45 - 20e^{-2} \approx 42,29$$

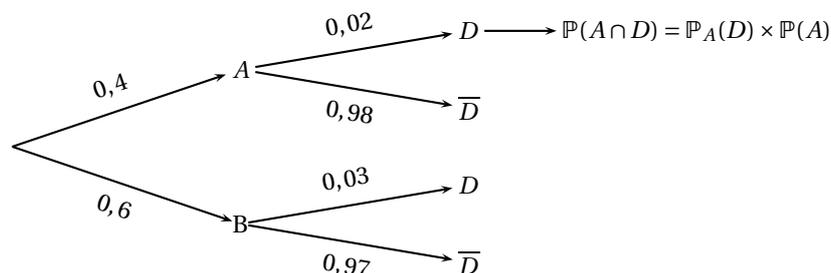
C'est le coût de production unitaire moyen.

EXERCICE 3

Commun à tous les candidats

Partie A

1. a. Voici l'arbre de probabilité :



5 points

b. Nous utilisons la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A \cap D) + \mathbb{P}(B \cap D)$$

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(D) + \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(D)$$

$$\mathbb{P}(D) = 0,4 \times 0,02 + 0,6 \times 0,03$$

$$\mathbb{P}(D) = 0,026.$$

c. $\mathbb{P}_D(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap D)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{0,4 \times 0,02}{0,026} \approx 0,308$

2. a. Nous sommes dans le cas d'une expérience de Bernoulli (on a affaire à une médaille défectueuse ou non).

Nous répétons cette expérience de manière indépendante avec remise, nous sommes dans le cas d'un schéma de Bernoulli.

Comme X est une variable aléatoire comptant le nombre de médaille défectueuse, nous pouvons assimiler cette loi à une loi binomiale : $X = \mathcal{B}(n, p)$, où $n = 20$ et $p = 0,026$.

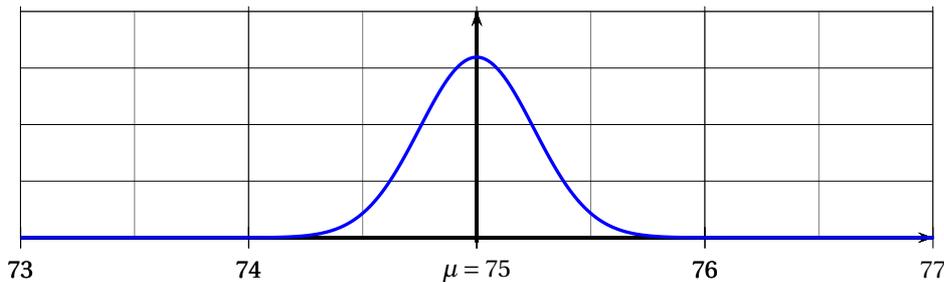
b. Ici nous calculons :

$$\mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = \binom{20}{0} 0,026^0 \times (1 - 0,026)^{20} + \binom{20}{1} 0,026^1 \times (1 - 0,026)^{19} \approx 0,906$$

Ou encore :

$$\mathbb{P}(X \leq 1) = \text{BinomFrep}(20, 0.026, 1) \approx 0,906$$

Partie B



1. Nous pouvons lire : $\mu = 75$.

2. $\mathbb{P}(74,4 \leq Y \leq 75,6) = \text{NormalFrep}(74.4, 75, 6, 75, 0.25) \approx 0,984$.

3. Le résultat de cours est : $\mathbb{P}(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$,
ici $h = 2\sigma = 0,50$.

Partie C

1. La fréquence de médaille défectueuse est de : $f = \frac{11}{180} \approx 0,061$.

2. X_n suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. la variable $F_n = \frac{X_n}{n}$ représente la fréquence de médaille défectueuse. La proportion de médaille défectueuse de l'échantillon de taille n est p . Ici : $n = 180$ et $n \geq 30$, $n \times p = 180 \times 0,03 = 5,4 \geq 5$ et $n \times (1 - p) = 180 \times 0,97 = 174,6 \geq 5$
L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% vaut :

$$I = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right].$$

Ici : $p = 0,03$ et $n = 180$.

$$I \approx [0,00507895133 ; 0,0549210487]$$

Or : $f \notin I$, le résultat de la question précédente rend pertinente la prise de décision d'arrêter la production pour procéder au réglage de la machine M_B .

EXERCICE 4

5 points

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

La situation peut être modélisée par une suite (u_n) .

Le premier juillet 2013 au matin, le volume d'eau en m^3 est $u_0 = 100\,000$.

Pour tout entier naturel n supérieur à 0, u_n désigne le volume d'eau en m^3 au matin du n -ième jour qui suit le 1^{er} juillet 2013.

1. a. Volume d'eau u_1 au matin du 2 juillet 2013 :

$$u_0 = 100\,000 \xrightarrow{-4\%} 0,96 \times 100\,000 = 96\,000 \xrightarrow{-500} 96\,000 - 500 = 95\,500 = u_1$$

- b. Volume d'eau u_2 , au matin du 3 juillet 2013 :

$$u_1 = 95\,500 \xrightarrow{-4\%} 0,96 \times 95\,500 = 91\,680 \xrightarrow{-500} 91\,680 - 500 = 91\,180 = u_2$$

- c. Pour tout entier naturel n

$$u_n \xrightarrow{-4\%} 0,96 \times u_n \xrightarrow{-500} 0,96u_n - 500 = u_{n+1}$$

Ainsi, $u_{n+1} = 0,96u_n - 500$.

2. Pour déterminer à quelle date la retenue ne contiendra plus d'eau, on a commencé par élaborer l'algorithme ci-dessous. Recopier et compléter les lignes L6, L7 et L9 de cet algorithme pour qu'il donne le résultat attendu.

| | | |
|----|---------------------|---|
| L1 | Variables : | u est un nombre réel |
| L2 | | n est un entier naturel |
| L3 | Traitement : | Affecter à u la valeur 100 000 |
| L4 | | Affecter à n la valeur 0 |
| L5 | | Tant que $u > 0$ |
| L6 | | Affecter à n la valeur $n + 1$ |
| L7 | | Affecter à u la valeur $0,96 * u - 500$ |
| L8 | | Fin Tant que |
| L9 | Sortie : | Afficher n |

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + 12\,500 \iff u_n = v_n - 12\,500$.

- a. La suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,96 :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 12\,500 = 0,96u_n - 500 + 12\,500 = 0,96u_n + 12\,000 = 0,96(u_n + 12\,500) = 0,96 \times v_n$$

$$v_0 = u_0 + 12\,500 = 100\,000 + 12\,500 = 112\,500$$

- b. Ainsi : $v_n = 112\,500 \times (0,96)^n$.

- c. Donc :

$$v_n = u_n + 12\,500 \iff u_n = v_n - 12\,500 = 112\,500 \times 0,96^n - 12\,500$$

4. a. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $112\,500 \times 0,96^n - 12\,500 \leq 0$:

$$\begin{aligned} 112\,500 \times 0,96^n - 12\,500 \leq 0 &\iff 112\,500 \times 0,96^n \leq 12\,500 \\ &\iff 0,96^n \leq \frac{12\,500}{112\,500} \approx 0,111 \\ &\iff \ln(0,96^n) = n \ln 0,96 \leq \ln \frac{12\,500}{112\,500} \\ &\iff n \geq \frac{\ln \frac{12\,500}{112\,500}}{\ln 0,96} \approx 53,825 \end{aligned}$$

- b. Au matin du 54^e jour, il n'y aura plus d'eau dans le bassin.

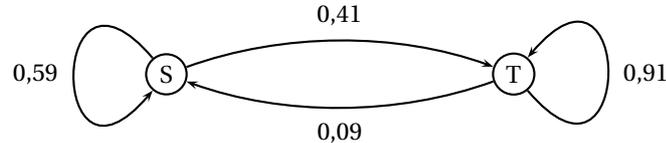
EXERCICE 4

5 points

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. Voici le graphe probabiliste d'ordre 2 de la situation :

2. L'état stable P vérifie : $P = PM \Leftrightarrow (a \ b) = (a \ b) \times \begin{pmatrix} 0,59 & 0,41 \\ 0,09 & 0,91 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow (a \ b) = (0,59a + 0,09b \quad 0,41a + 0,91b)$$

Deux matrices sont égales si et seulement si leurs coefficients sont égaux :

$$\begin{cases} a = 0,59a + 0,09b \\ b = 0,41a + 0,91b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -0,41a + 0,09b \\ 0 = 0,41a - 0,09b \end{cases}$$

Une des deux lignes peut être éliminée et comme $a + b = 1$, on en déduit :

$$\begin{cases} 0,41a - 0,09b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

3. Comme tous les coefficients de M sont différents de 0, P_n va converger vers P . L'opérateur TECIM va bien atteindre son objectif, en effet a_n et b_n vont converger vers $a = 0,18$ et $b = 0,82$.

82% des clients vont aller chez TECIM.

L'opérateur TECIM atteindra l'objectif d'avoir comme clients au moins 80%.

Partie B

1. La répartition des clients au bout de 2 ans est donnée par :

$$P_2 = P_0 \times M^2 = (0,35 \ 0,65) \times \begin{pmatrix} 0,59 & 0,41 \\ 0,09 & 0,91 \end{pmatrix}^2 = (0,2225 \quad 0,7775)$$

Au bout de deux ans, 22,25% des clients seront chez SAFIR et 77,75% chez TECIM.

2. $p_{n+1} = P_n \times M \Leftrightarrow (s_{n+1} \ t_{n+1}) = (s_{n+1} \ t_{n+1}) \times \begin{pmatrix} 0,59 & 0,41 \\ 0,09 & 0,91 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow (s_{n+1} \ t_{n+1}) = (0,59s_n + 0,09t_n \quad 0,41s_n + 0,91t_n)$$

Deux matrices sont égales si et seulement si leurs coefficients sont égaux :

$$\text{Ainsi : } t_{n+1} = 0,41s_n + 0,91t_n$$

$$\text{Or : } s_n + t_n = 1 \Leftrightarrow s_n = 1 - t_n$$

$$\text{On en déduit que : } t_{n+1} = 0,41(1 - t_n) + 0,91t_n \Leftrightarrow t_{n+1} = 0,41 + 0,5t_n.$$

3. Voici le tableau complété :

| | | |
|----|---------------------|---|
| L1 | Variables : | T est un nombre |
| L2 | | N est un nombre entier |
| L3 | Traitement : | Affecter à T la valeur 0,65 |
| L4 | | Affecter à N la valeur 0 |
| L5 | | Tant que $T < 0,80$ |
| L6 | | Affecter à T la valeur $0,5 * T + 0,41$ |
| L7 | | Affecter à N la valeur $N + 1$ |
| L8 | | Fin Tant que |
| L9 | Sortie : | Afficher N |

4. a. $u_{n+1} = t_{n+1} - 0,82$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = 0,41 + 0,5t_n - 0,82$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = 0,5t_n - 0,41$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = 0,5(t_n - 0,82)$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = 0,5u_n$$

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,5$.

b. Le terme général de (u_n) vaut : $u_n = u_0 \times q^n$.

Or : $u_0 = t_0 - 0,82 = 0,65 - 0,82 = -0,17$.

Ainsi : $u_n = -0,17 \times 0,5^n$.

Comme : $t_n = u_n + 0,82$

On conclut que : $t_n = -0,17 \times 0,5^n + 0,82$.

c. On pourrait utiliser l'algorithme, ou passer par les logarithmes :

$$\begin{aligned} t_n &\geq 0,80 \\ -0,17 \times 0,5^n + 0,82 &\geq 0,80 \\ -0,17 \times 0,5^n &\geq -0,02 \\ 0,5^n &\leq \frac{0,02}{0,17} \\ \ln(0,5^n) &\leq \ln\left(\frac{0,02}{0,17}\right) \\ n \ln 0,5 &\leq \ln\left(\frac{0,02}{0,17}\right) \\ n &\geq \ln\left(\frac{0,02}{0,17}\right) \div \ln 0,5 \quad (\text{en effet : } \ln 0,5 < 0) \\ n &\geq 3,08746284 \\ n &\geq 4 \end{aligned}$$

d. Au bout de 4 ans le nombre de client de TECIM sera supérieur ou égal à 80%.