

◌ Corrigé du Baccalauréat ES Métropole–La Réunion 24 juin 2015 ◌

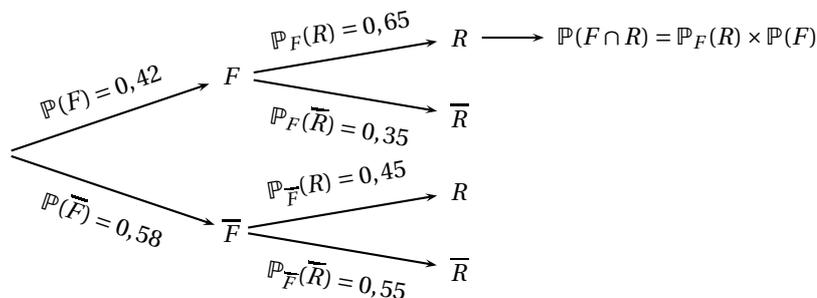
EXERCICE 1

6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1.



2. $\mathbb{P}(F \cap R) = \mathbb{P}_F(R) \times \mathbb{P}(F) = 0,65 \times 0,42 = 0,273$

3. En utilisant la formule des probabilités totales, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R) &= \mathbb{P}(R \cap F) + \mathbb{P}(R \cap \bar{F}) \\ &= \mathbb{P}_F(R) \times \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}_{\bar{F}}(R) \times \mathbb{P}(\bar{F}) \\ &= 0,65 \times 0,42 + 0,45 \times 0,58 \\ &= 0,273 + 0,261 \\ &= 0,534 \end{aligned}$$

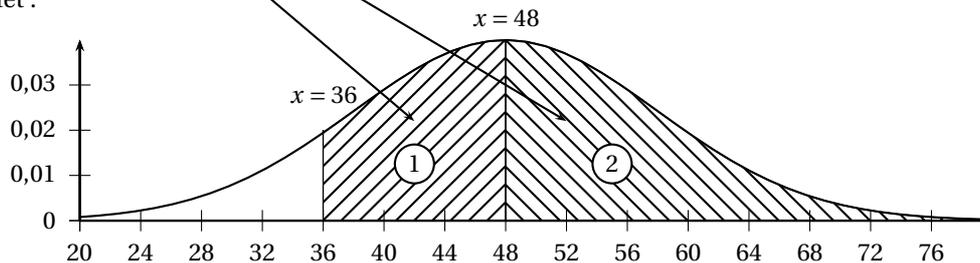
Partie B

Ici X suit la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec $\mu = 48$ et $\sigma = 10$.

1. Nous calculons ici :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 36) &= \mathbb{P}(36 < X \leq 48) + \mathbb{P}(X > 48) && \text{(C'est une loi continue, et les deux évènements sont incompatibles)} \\ &= \mathbb{P}(36 \leq X \leq 48) + \mathbb{P}(X \geq 48) && \text{(C'est une loi continue)} \\ &\approx 0,3849 + 0,5 && \text{(le 1 est obtenu en utilisant la calculatrice, le 2 vaut 0,5)} \\ &\approx 0,885 && \text{C'est la moitié de l'aire totale sous la courbe} \end{aligned}$$

En effet :



2. Nous calculons ici :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{X > 3 \times 12}(X < 5 \times 12) &= \frac{\mathbb{P}_{X \geq 36}(X \leq 60)}{\mathbb{P}(36 \leq X \leq 60)} && \text{(C'est une loi continue)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X \geq 36)}{0,76986} \\ &\approx \frac{0,884930}{0,76986} \\ &\approx 0,870 \end{aligned}$$

partie C

1. Nous savons que :

- $p = 0,3$ la proportion.

- $n = 1500$ et $n \geq 30$
- $n \times p = 450$ et $450 \geq 5$
- $n \times (1 - p) = 1050$ et $1050 \geq 5$.

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence vaut :

$$I = \left[p - 1,96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right].$$

En effectuant les calculs, nous obtenons :

$$I = [0,276 ; 0,323].$$

2. La fréquence observée pour l'échantillon vaut : $f = \frac{430}{1500} \approx 0,287$. Ici $f \in I$, $p = 0,3$ est donc acceptable.

EXERCICE 2

5 points

candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $u_3 = 2000 \times 1,008^2 \approx 2\,032,13$. Le coût après 30 m de forage est de 2 032,13 €.

Le coût total est donc à peu près égal à :

2000 + 2016 + 2032,13 soit au centime près 6 048,13 €.

2. a. Nous pouvons calculer :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2000 \times 1,008^{n+1-1} \\ &= 2000 \times 1,008^{n-1+1} \\ &= 2000 \times 1,008^{n-1} \times 1,008 \\ &= u_n \times 1,008 \end{aligned}$$

(u_n) est géométrique de raison : $q = 1,008$.

- b. $u_{n+1} = 1,008 \times u_n \Leftrightarrow u_{n+1} = \left(1 + \frac{0,8}{100}\right) \times u_n$.

Pour passer de n à $n + 1$ le coefficient multiplicateur vaut : $\left(1 + \frac{0,8}{100}\right)$.

Le pourcentage d'augmentation permettant de passer de n à $n + 1$ vaut donc : $t = 0,8 \%$.

3. a. En utilisant l'algorithme, nous trouvons :

| | | | | | |
|----------------|------|------|-------------------|-------------------|----------------------|
| valeurs de i | | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Valeur de u | 2000 | 2016 | $\approx 2032,13$ | 2048,39 | 2064,77 |
| Valeur de S | 2000 | 4016 | $\approx 6048,13$ | $\approx 8096,51$ | $\approx 10\,161,29$ |

- b. La sortie donne : $\approx 10\,161,29$. C'est le coût de forage à 50 mètres de profondeur.

4. a. On recherche le plus grand entier n pour lequel :

$$\begin{aligned} S_n &\leq 125\,000 \\ -250\,000 + 250\,000 \times 1,008^n &\leq 125\,000 \\ 250\,000 \times 1,008^n &\leq 375\,000 \\ 1,008^n &\leq \frac{375}{250} \\ \ln(1,008^n) &\leq \ln\left(\frac{375}{250}\right) \\ n \ln 1,008 &\leq \ln\left(\frac{375}{250}\right) \\ n &\leq \ln\left(\frac{375}{250}\right) \div \ln(1,008) \\ n &\leq 50,885 \end{aligned}$$

Le coût est supérieur à 125 000 pour n plus grand que 50.

La profondeur maximale est donc égale à 500 mètres.

- b. Voici l'algorithme modifié :

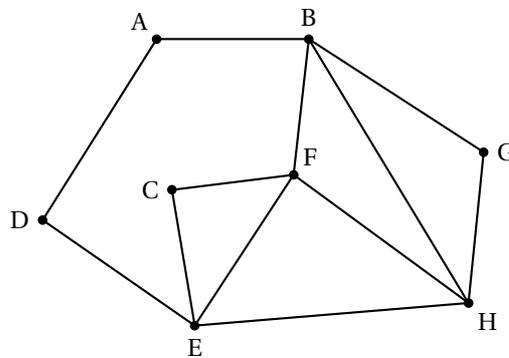
Variables :

n : dans \mathbb{N}
 u, S : dans \mathbb{R}
Initialisation :
 u prend la valeur 2 000
 S prend la valeur 2 000
 n prend la valeur 1
Traitement :
tant que $S \leq 125\,000$ **faire**
 u prend la valeur $u * 1,008$
 S prend la valeur $S + u$
 n prend la valeur $n + 1$
fin tant que
Sortie :
Afficher $(n - 1) \times 10$

EXERCICE 2
candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

5 points

Partie A



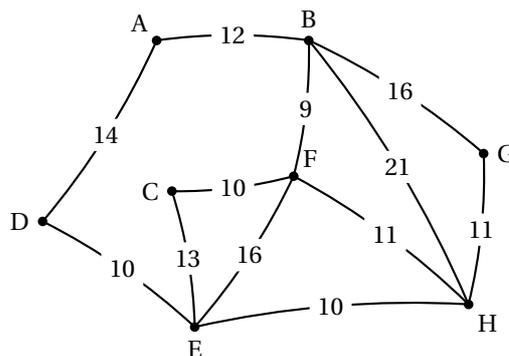
1. **a.** Ce graphe Γ possède 8 sommets et c'est un graphe connexe, la chaîne A-B-G-H-F-C-E-D passe par tous les sommets, deux sommets quelconques seront toujours reliés par une chaîne.
- b.** Tableau des sommets degrés

| Sommets | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Degrés | 2 | 4 | 2 | 2 | 4 | 4 | 2 | 4 |

Le graphe a tous ses sommets de degré pair, étant connexe, il admet un cycle Eulérien d'après le théorème d'Euler, donc à fortiori une chaîne eulérienne.

2. Le nombre de chemin de longueur 3 reliant E à B est donné par $M_{25}^{(3)} = 5$, il y a 5 chemins de longueur 3 reliant E à B.

Partie B



1. a. Nous avons déjà répondu à la question dans la partie A 1. b.
Voici un exemple de cycle : A-B-F-C-E-F-H-B-G-H-E-D-A .(nous avons utilisé ici l’algorithme d’Euler).
- b. Nous cherchons ici tous les chemins de longueurs 3 reliant le refuge E au refuge B. Il y en a 5 (d’après la question 2. b. de la partie A).
Voici les chemins possibles : E-C-F-B E-H-F-B E-D-A-B E-H-G-B E-F-H-B.
2. Pour déterminer la distance la plus courte entre A et H, nous utiliserons l’algorithme de Dijkstra :

| A | B | C | D | E | F | G | H | select |
|---|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|--------|
| 0 | ∞ | A(0) |
| | 12 (A) | ∞ | 14 (A) | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | B(12) |
| | | ∞ | 14 (A) | ∞ | 21 (B) | 28 (B) | 33 (B) | D(14) |
| | | ∞ | | 24 (D) | 21 (B) | 28 (B) | 33 (B) | F(21) |
| | | 31 (F) | | 24 (D) | | 28 (B) | 32 (F) | E(24) |
| | | 31 (F) | | | | 28 (B) | 32 (F) | G(28) |
| | | 31 (F) | | | | | 32 (F) | C(31) |
| | | | | | | | 32 (F) | H(32) |

La distance la plus courte vaut : 32

La chaîne qui la réalise vaut : A-B-F-H.

L’itinéraire le plus court reliant A à H fait donc 32 km et passe par les sommets suivants : A-B-F-H.

EXERCICE 3
commun à tous les candidats

6 points

Partie A

1. a. $f'(-3) = 0$, en effet au point d’abscisse -3 la tangente à la courbe est horizontale.
b. $f(0) = 2$ et $f'(0) = -3$.
2. Nous savons que : $f(x) = a + (x + b)e^{-x}$.
- a. f est dérivable sur \mathbb{R} et : $f'(x) = 0 + 1 \times e^{-x} - e^{-x} \times (x + b) = e^{-x}(1 - x - b)$.
- b. Comme :
- $f'(0) = -3 \Rightarrow \times e^{-0}(1 - 0 - b) = -3 \Rightarrow 1 - b = -3$.
 - $f(0) = 2 \Rightarrow a + (0 + b) \times e^{-0} = 2 \Rightarrow a + b = 2$.
- c. De la question précédente, nous déduisons le système suivant et sa résolution :

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 1-b=-3 \end{cases} \iff \begin{cases} a=2-b \\ b=4 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-2 \\ b=4 \end{cases}$$

Conclusion : $f(x) = -2 + (x + 4)e^{-x}$.

Partie B

1. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} en tant que somme de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x} - e^{-x} \times (x + 4) \\ &= e^{-x}(1 - (x + 4)) \\ &= e^{-x}(-x - 3) \end{aligned}$$

Comme : $e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $f'(x)$ ne dépendra que de : $-x - 3$.

Nous en déduisons le tableau de signes de $f'(x)$ et le tableau de variations de f :

| | | | |
|----------|----|------------|----------------|
| x | -4 | -3 | 3 |
| $-x - 3$ | + | 0 | - |
| e^{-x} | + | 0 | + |
| $f'(x)$ | + | 0 | - |
| f | -2 | $-2 + e^3$ | $-2 + 7e^{-3}$ |

Avec les valeurs suivantes :

- $f(-4) = -2 + (-4 + 4)e^4 = -2$
- $f(-3) = -2 + (-3 + 4)e^3 = -2 + e^3 \approx 18,09$
- $f(3) = -2 + (3 + 4)e^{-3} \approx -1,651$

2. • sur $[-3; 3]$, f est strictement décroissante.
 • f est dérivable sur \mathbb{R} , elle est donc continue sur \mathbb{R} et donc sur $[-3; 3]$.
 • 0 est compris entre $f(-3)$ et $f(3)$. Nous les avons calculé ci-dessus.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie de la fonction f sur $[-3; 3]$, $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans cet intervalle.

Avec la calculatrice, nous trouvons : $\alpha \approx 0,895 \approx 0,90$.

3. a. La fonction f est continue (elle est dérivable) et sur l'intervalle $[-3; 0]$, elle admet un minimum atteint pour $x = 0$ et qui vaut : $f(0) = 2$.

On en déduit que $f(x) > 0$ pour tout $x \in [-3; 0]$.

Ainsi l'aire comprise entre les axes d'équations $x = -3$, $x = 0$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de f vaut :

$$\mathcal{A} = \int_{-3}^0 f(x) dx.$$

- b. Une primitive de f vaut F , d'après la copie d'écran donnée dans le sujet. En effet :

$$F'(x) = x \times e^{-x} + 4 \times e^{-x} - 2 = (x + 4) \times e^{-x} - 2 = -2 + (x + 4)e^{-x}.$$

Calculons ensuite :

- $F(-3) = -2 \times (-3) + (+3 - 5)e^{+3} = -2e^3 + 6$
- $F(0) = -2 \times 0 + (-0 - 5)e^{-0} = -5$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{-3}^0 f(x) dx \\ &= [F(x)]_{-3}^0 \\ &= F(0) - F(-3) \\ &= -5 - (-2e^3 + 6) \\ &= 2e^3 - 11 \\ &\approx 29,17 \text{ U.A.} \end{aligned}$$

EXERCICE 4

3 points

Commun à tous les candidats

Cette fonction est deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^*

- $f'(x) = 3 - 3 \ln x - 3x \times \frac{1}{x} = -3 \ln x.$
- $f''(x) = -\frac{3}{x}.$

Sur \mathbb{R}_+^* , $f''(x) < 0$, f' est donc strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* . Nous en déduisons que f est concave sur \mathbb{R}_+^* .

Toutes ses tangentes sont donc au-dessus de \mathcal{C}_f sur \mathbb{R}_+^* , plus particulièrement la tangente T au point d'abscisse 1.