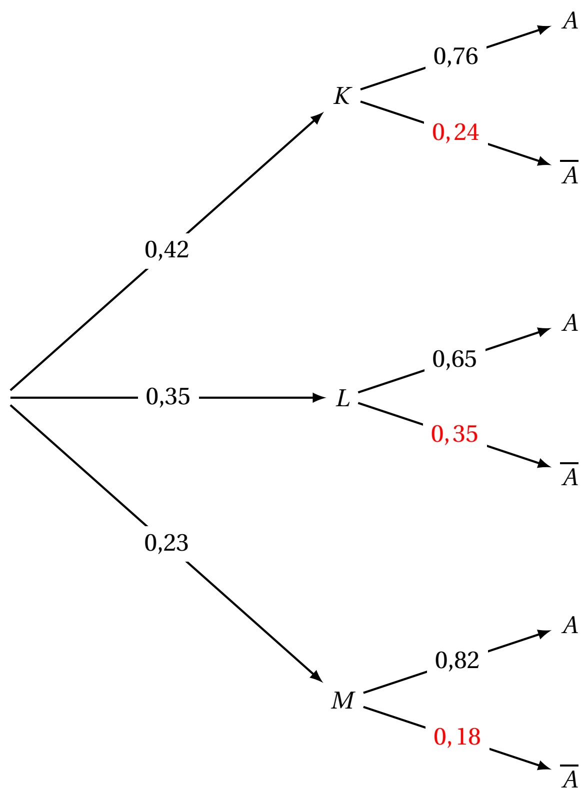
Corrigé du baccalauréat ES Polynésie 10 juin 2016

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Voici un arbre qui convient (les données du texte sont en noir) :



2. La probabilité que la demande de prêt soit déposée auprès de la banque Karl et soit acceptée est donnée par : $p(K \cap A)$.
$p(K \cap A) = p(K) \times p_K(A)$
$p(K \cap A) = 0,42 \times 0,76$
$p(K \cap A) = 0,3192$
$p(K \cap A) \simeq 0,319$.

3. D'après la formule des probabilités totales on obtient :
$p(A) = p(K \cap A) + p(L \cap A) + p(M \cap A)$
$p(A) = 0,3192 + 0,35 \times 0,65 + 0,23 \times 0,82$
$p(A) = 0,3192 + 0,2275 + 0,1886$
$p(A) = 0,7353$
$p(A) \simeq 0,735$.

4. On cherche $p_A(M)$.
Or, $p_A(M) = \dfrac{p(A \cap M)}{p(A)}$
$p_A(M) = \dfrac{0,1886}{0,7353}$
$p_A(M) \simeq 0,256$

Partie B

1. On calcule $P(13 \leqslant X \leq 27) \simeq 0,683$
   La probabilité que la durée d'un prêt soit comprise entre 13 et 27 ans est d'environ $0,683$.
2. On cherche a tel que $P(X > a) = 0,1$.
   $P(X > a) = 0,1 \iff 1 - P(X \leqslant a) = 0,1$
   $P(X > a) = 0,1 \iff P(X \leqslant a) = 0,9$
   La calculatrice nous permet de trouver $a \simeq 28,97$.
   La probabilité qu'un prêt dure plus de $28,97$ ans est de $0,1$.

Exercice 2 **7 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** $u_1 = 5000$, or $u_1 = a \times u_0 + b = b$ car $u_0 = 0$ donc $b = 5000$.
   b. $u_2 = 11000$, et $u_2 = a \times u_1 + b = a \times u_1 + 5000$ donc $11000 = a \times 5000 + 5000$ d'où $a = \dfrac{11000 - 5000}{\times 5000} = 1,2$
   Donc,pour tout entier n, on a :
   $$u_{n+1} = 1,2 \times u_n + 5000.$$
2. **a.**
   $$u_3 = 1,2 \times u_2 + 5000 = 18200$$
   $$u_4 = 1,2 \times u_3 + 5000 = 26840$$
   b. En 2013 et 2014, l'entreprise a vendu respectivement 18 000 et 27 000 écrans 3D.
   La modélisation semble pertinente car $u_3 = 18200$ et $u_4 \simeq 27000$

   Dans toute la suite, on fait l'hypothèse que le modèle est une bonne estimation du nombre d'écrans 3D que l'entreprise va vendre jusqu'en 2022.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :
   $$v_n = u_n + 25000.$$
   a. Pour tout entier naturel n, $\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 25000 \\ &= 1,2u_n + 5000 + 25000 \\ &= 1,2u_n + 30000 \\ &= 1,2(u_n + 25000) \\ &= 1,2v_n \end{aligned}$
   La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien une suite géométrique de raison $q = 1,2$.
   $v_0 = u_0 + 25000 = 25000$
   Son premier terme est $v_0 = 25000$.
   b. Puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 1,2$ et de premier terme v_0, on a, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n$, soit
   $v_n = 25000 \times 1,2^n$.
   Comme, pour tout entier naturel n, on a $v_n = u_n + 25000$, alors $u_n = v_n - 25000$
   Donc, pour tout entier naturel n, $u_n = 25000 \times 1,2^n - 25000$.
4. **a.** Or, pour tout entier naturel n, $\begin{aligned} u_n > 180000 &\Leftrightarrow 25000 \times 1,2^n - 25000 > 180000 \\ &\Leftrightarrow 25000 \times 1,2^n > 25000 + 180000 \\ &\Leftrightarrow 25000 \times 1,2^n > 205000 \\ &\Leftrightarrow 1,2^n > 8,2 \end{aligned}$

b.

Variables :	N est un entier naturel
	W est un nombre réel
Initialisation :	N prend la valeur 0
	W prend la valeur 1
Traitement :	Tant que $W \leqslant 8,2$
	W prend la valeur $W \times 1,2$
	N prend la valeur $N+1$
	Fin du Tant que
Sortie :	Afficher N

c. $n = 12$.

d. Le nombre de ventes en 2022 est $u_{12} = 25\,000 \times 1,2^{12} - 25\,000 \simeq 197\,903$.
À partir de 2023, l'entreprise prévoit une baisse de 15 % par an du nombre de ses ventes d'écrans 3D.
Donc $u_{15} = (1-0,15)^3 \times 197\,903 \simeq 121\,537$. En 2025 elle peut donc prévoir de vendre 121 537 écrans 3D.

Exercice 3 — 5 points
Obligatoire

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln x - x + 1.$$

$$f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x.$$

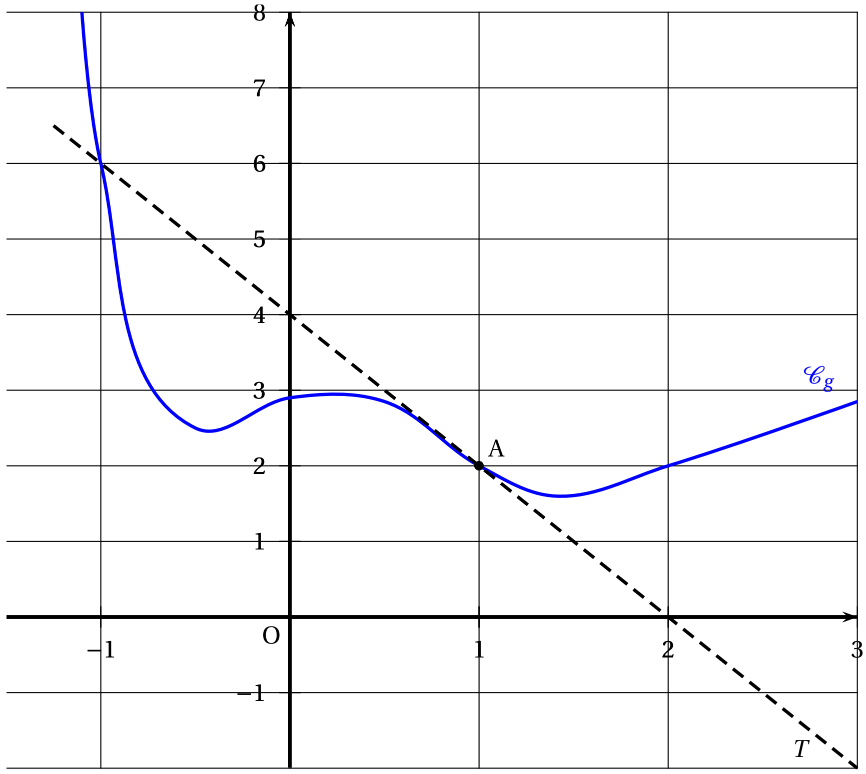
$$f''(x) = \frac{1}{x}.$$

Affirmation A : La fonction f est croissante sur l'intervalle $]0\,;1[$. Affirmation **fausse** car sur l'intervalle $]0\,;1[$ $f'(x) < 0$ donc f est décroissante.

Affirmation B : La fonction f est convexe sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. Affirmation **vraie** car sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $\dfrac{1}{x} > 0$ donc $f''(x) > 0$
donc la fonction f est convexe sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. Autre méthode : f' est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ donc f est convexe sur cet intervalle.

Affirmation C : Pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f(x) \leqslant 50$. Affirmation **fausse** $f(23) \simeq 50,116$

2. On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$.
On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on rappelle que g' désigne la fonction dérivée de la fonction g.
On a tracé en pointillé la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point A de cette courbe, d'abscisse 1 et d'ordonnée 2. Cette tangente coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 2.



Affirmation D : $g'(1) = -2$. Affirmation **vraie**.

En effet $g'(1)$ représente le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point A.

Cette tangente passe par A(1 ; 2) et le point de coordonnées (2 ; 0). Son coefficient directeur est :

$\dfrac{0-2}{2-1} = -2$

Affirmation E : $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x < 3$. Affirmation **vraie**.

En effet $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire exprimée en u. a. de la surface limitée par les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$, la courbe $\mathscr{C}_g$ et l'axe des abscisses.

L'aire de cette surface est inférieure à 3.

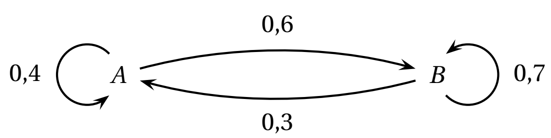
EXERCICE 3 **5 points**

Spécialité

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes

1. On donne le graphe probabiliste suivant :



Affirmation A : L'état stable associé à ce graphe est $\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

La matrice de transition M de ce graphe est : $M = \begin{pmatrix}0,4 & 0,6\\0,3 & 0,7\end{pmatrix}$. Les termes de cette matrice ne sont pas nuls, donc l'état P_n converge vers un état stable $P = \begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}$ vérifiant l'équation :

$P = P \times M$ soit $\left\{\begin{array}{rcl} a &=& 0,4a+0,3b\\ b &=& 0,6a+0,7b\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 0,6a &=& 0,3b\\ 0,3b &=& 0,6a\end{array}\right.$

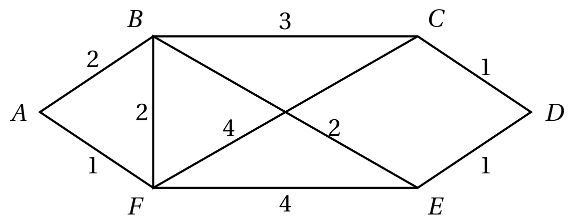
Mais on a de plus $a+b=1$, donc a et b vérifient le système :

$\left\{\begin{array}{rcl} 0,6a &=& 0,3b\\ a+b &=& 1\end{array}\right. \implies 0,6(1-b) = 0,3b \iff 0,6-0,6b = 0,3b \iff 0,6 = 0,9b \iff$

$b = \dfrac{0,6}{0,9} = \dfrac{2}{3}$, puis $a = 1-b = \dfrac{1}{3}$.

Donc l'état stable est $P = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$. **Affirmation A fausse**

2. On donne le graphe pondéré G suivant :



Affirmation B : Il existe une chaîne passant une et une seule fois par toutes les arêtes de ce graphe. Voici le tableau des sommets degrés :

Sommets	A	B	C	D	E	F
Degrés	2	4	3	2	3	4

Ce graphe est connexe. Il y a deux sommets de degré impair. D'après le théorème d'Euler, le graphe G admet une chaîne eulérienne (une chaîne passant une et une seule fois par toutes les arêtes du graphe).

Affirmation B vraie

Affirmation C : La plus courte chaîne entre les sommets A et D est une chaîne de poids 5. **Affirmation C vraie**. C'est la chaîne $A-B-E-D$.

3. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\1 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

On suppose que M est la matrice d'adjacence d'un graphe à quatre sommets A, B, C, D dans cet ordre.

Affirmation D : Il existe exactement 3 chaînes de longueur 4 reliant le sommet B au sommet D.

$$M^4 = \begin{pmatrix}7 & 6 & 4 & 6\\6 & 11 & 2 & 6\\4 & 2 & 3 & 4\\6 & 6 & 4 & 7\end{pmatrix}.$$

Le nombre de chaînes de longueur 4 reliant B à D est donné par $m_{24}^{(4)} = 6$.

Affirmation D fausse

4. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix}a & 0\\0 & a\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & a\end{pmatrix}$.

Affirmation E : Il existe un nombre réel a pour lequel B est l'inverse de A.

B est l'inverse de A si et seulement si $A\times B = I_2$ $A\times B = \begin{pmatrix}-a & 0\\ 0 & a^2\end{pmatrix}$. $A\times B = I_2 \iff \left\{\begin{array}{lll}-a & = & 1\\ a^2 & = 1\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{lll}a & = & -1\\ a^2 & = & 1\end{array}\right.$ **Affirmation E vraie**. Ce nombre est -1

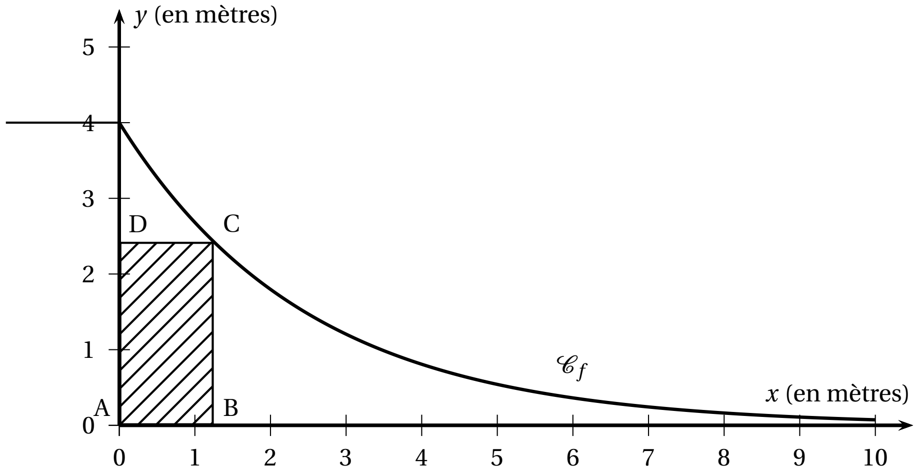
EXERCICE 4 **3 points**

Commun à tous les candidats

Un publicitaire envisage la pose d'un panneau rectangulaire sous une partie de rampe de skateboard. Le profil de cette rampe est modélisé par la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par :

$$f(x) = 4\mathrm{e}^{-0,4x}.$$

Cette courbe $\mathscr{C}_f$ est tracée ci-dessous dans un repère d'origine O :



Le rectangle ABCD représente le panneau publicitaire et répond aux contraintes suivantes : le point A est situé à l'origine du repère, le point B est sur l'axe des abscisses, le point D est sur l'axe des ordonnées et le point C est sur la courbe $\mathscr{C}_f$.

1. On suppose dans cette question que le point B a pour abscisse $x = 2$.
   L'aire du panneau publicitaire est l'aire du rectangle ABCD. $AB \times BC = 2 \times f(2) = 2 \times 4\mathrm{e}^{-0,8} = 8\mathrm{e}^{-0,8} \simeq 3,6$.
2. Parmi tous les panneaux publicitaires qui répondent aux contraintes de l'énoncé, quelles sont les dimensions de celui dont l'aire est la plus grande possible ?
   L'aire d'un panneau répondant aux contraintes de l'énoncé est donnée par $A(x) = xf(x) = 4x\mathrm{e}^{-0,4x}$.
   On cherche la valeur de x pour laquelle $A(x)$ est maximal.
   Pour cela on étudie la fonction $x \longmapsto A(x)$.
   On calcule $A'(x)$

   $A'(x) = 4\mathrm{e}^{-0,4x} - 1,6x\mathrm{e}^{-0,4x} = \mathrm{e}^{-0,4x}(4 - 1,6x)$
   On étudie le signe de $A'(x)$ Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-0,4x} > 0$ donc $A'(x)$ est du signe de $4 - 1,6x$ sur l'intervalle $[0 ; 10]$.
   - Si $x < 2,5$, $A'(x) > 0$ donc A est strictement croissante sur $[0 ; 2,5[$;
   - Si $x > 2,5$, $A'(x) < 0$ donc A est strictement décroissante sur $]2,5 ; 10]$;
   - $A'(2,5) = 0$ et A admet un maximum en $2,5$.

   Les dimensions du panneau sont donc $2,5$ m et $f(2,5) = 4\mathrm{e}^{-1} \simeq 1,47$ m.