Durée : 3 heures

Corrigé du baccalauréat ES/L – Liban 29 mai 2018

Exercice 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs.
On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique.
On note :

- S l'évènement « le voyageur fait sonner le portique » ;
- M l'évènement « le voyageur porte un objet métallique ».

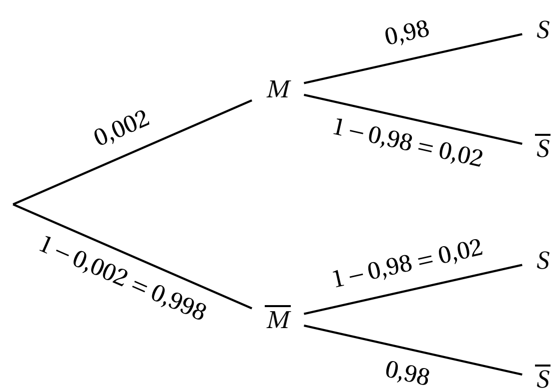
On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.

1. On admet que :

- Lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,98 ;
- Lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi égale à 0,98.

a. D'après l'énoncé, $P(M) = \dfrac{1}{500} = 0{,}002$, $P_M(S) = 0{,}98$ et $P_{\overline{M}}\left(\overline{S}\right) = 0{,}98$.

b. L'arbre pondéré ci-dessous illustre cette situation :



c. D'après la formule des probabilités totales :
$P(S) = P(S \cap M) + P\left(S \cap \overline{M}\right) = P_M(S) \times P(M) + P_{\overline{M}}(S) \times P\left(\overline{M}\right) = 0{,}002 \times 0{,}98 + 0{,}998 \times 0{,}02 = 0{,}021\,92$.

d. Par définition : $P_S(M) = \dfrac{P(M \cap S)}{P(S)} = \dfrac{P_M(S) \times P(M)}{P(S)} = \dfrac{0{,}002 \times 0{,}98}{0{,}02192} \approx 0{,}089$

2. 80 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité. On suppose que pour chaque personne la probabilité que le portique sonne est égale à 0,021 92.

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique, parmi les 80 personnes de ce groupe.

a. On répète de manière identique et indépendante (situation assimilée à un tirage avec remise) 80 fois de suite cette épreuve. Il s'agit d'un schéma de Bernoulli donc la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0{,}021\,92$.

b. L'espérance d'une loi binomiale est : $E(X) = n \times p = 80 \times 0{,}021\,92 = 1{,}753\,6$.
Donc par groupe de 80 personnes le portail sonnera un peu moins de 2 fois.

c. On donne les valeurs arrondies à 10^{-3} de :

- la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique :
$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - (1 - 0{,}021\,92)^{80} \approx 0{,}830$.
- la probabilité qu'au maximum 5 personnes fassent sonner le portique :
$p(X \leqslant 5) \approx 0{,}992$ (à la calculatrice).

d. Avec la calculatrice : $p(X \leqslant 2) \approx 0{,}744$ et $p(X \leqslant 3) \approx 0{,}992$. Donc $n = 3$.

Exercice 2 **5 points**

Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

Maya possède 20 € dans sa tirelire au 1er juin 2018.
À partir de cette date, chaque mois elle dépense un quart du contenu de sa tirelire puis y place 20 € supplémentaires.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la somme d'argent contenue dans la tirelire de Maya à la fin du n-ième mois. On a $u_0 = 20$.

1. **a.** Elle dépense le quart des 20 euros de départ, donc il lui reste les trois quarts de la somme, soit 15 euros. Puis elle ajoute 20 euros. Donc elle aura 35 euros le mois suivant. Donc $u_1 = 35$.

   b. $u_2 = 0{,}75 \times 35 + 20 = 46{,}25$.

2. On admet que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 20$.
On considère l'algorithme suivant :

```
U ⟵ 20
N ⟵ 0
Tant que U < 70
        U ⟵ 0,75 × U + 20
        N ⟵ N + 1
Fin Tant que
Afficher N
```

   a. On complète le tableau ci-dessous qui retrace les différentes étapes de l'exécution de l'algorithme en arrondissant les résultats au centième :

Valeur de U	20	35	46,25	54,69	61,02	67,76	69,32	71,99
Valeur de N	0	1	2	3	4	5	6	7
Condition $U < 70$	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux

   b. Cet algorithme affiche la valeur $N = 7$; donc au bout du 7e mois la somme disponible sera supérieure à 70 euros.

3. Pour tout entier n, on pose $v_n = u_n - 80$.

   a. Pour tout entier n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 80 = 0{,}75 \times u_n + 20 - 80 = 0{,}75 \times u_n - 60 = 0{,}75\left(u_n - \dfrac{60}{0{,}75}\right) = 0{,}75 \times (u_n - 80) = 0{,}75 \times v_n$.
Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75.

   b. $v_0 = u_0 - 80 = 20 - 80 = -60$.

   c. Pour tout entier n, $v_n = v_0 \times q^n = -60 \times 0{,}75^n$.
De plus $u_n = v_n + 80 = -60 \times 0{,}75^n + 80 = 80 - 60 \times 0{,}75^n$.

d. Pour trouver le montant que Maya possèdera dans sa tirelire au 1er juin 2019, on cherche la somme disponible fin mai 2019, ce qui correspond à $n = 12$: $u_{12} = 80 - 60 \times 0{,}75^{12} \approx 78{,}10$.
Maya aura dans sa tirelire le 1er juin 2019 78,10 €.

e. La raison de la suite géométrique (v_n) est strictement comprise entre -1 et 1, donc sa limite quand n tend vers l'infini est égale à 0.

f. Donc la limite de la suite (u_n) est égale à 80; cela signifie que le contenu de la tirelire va avoir tendance à se stabiliser vers 80 € au bout d'un certain temps.

Exercice 2 **5 points**
Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans un pays deux opérateurs se partagent le marché des télécommunications mobiles. Une étude révèle que chaque année :

- parmi les clients de l'opérateur *EfficaceRéseau*, 70 % se réabonnent à ce même opérateur et 30 % souscrivent un contrat avec l'opérateur *GenialPhone*;
- parmi les clients de l'opérateur *GenialPhone*, 55 % se réabonnent à ce même opérateur et 45 % souscrivent un contrat avec l'opérateur *Efficaceréseau*.

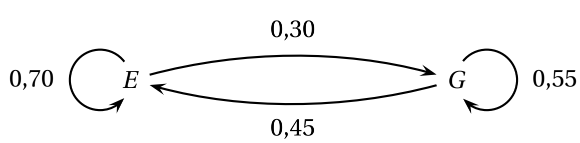
On note E l'état : « la personne possède un contrat chez l'opérateur *EfficaceRéseau* » et G l'état : « la personne possède un contrat chez l'opérateur *GenialPhone* ».
À partir de 2018, on choisit au hasard un client de l'un des deux opérateurs.

On note également :

- e_n la probabilité que le client possède un contrat avec l'opérateur *EfficaceRéseau* au 1er janvier $(2018 + n)$;
- g_n la probabilité que le client possède un contrat avec l'opérateur *GenialPhone* au 1er janvier $(2018 + n)$;
- $P_n = \begin{pmatrix} e_n & g_n \end{pmatrix}$ désigne la matrice ligne traduisant l'état probabiliste du système au 1er janvier $(2018 + n)$.

Au 1er janvier 2018, on suppose que 10 % des clients possèdent un contrat chez *EfficaceRéseau*, ainsi $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$.

1. On représente cette situation par un graphe probabiliste de sommets E et G :



2. a. La matrice de transition est : $M = \begin{pmatrix} 0{,}70 & 0{,}30 \\ 0{,}45 & 0{,}55 \end{pmatrix}$.

b. $P_2 = P_0 \times M^2 = (0{,}56875 \quad 0{,}43125)$ donc $e_2 \approx 0{,}57$ soit 57 %.

3. a. On rappelle que $P_{n+1} = P_n \times M$. Donc pour tout entier naturel n,
$(e_{n+1} \quad g_{n+1}) = (e_n \quad g_n) \times \begin{pmatrix} 0{,}70 & 0{,}30 \\ 0{,}45 & 0{,}55 \end{pmatrix} = (0{,}70 \times e_n + 0{,}45 \times g_n \quad 0{,}30 \times e_n + 0{,}55 \times g_n)$.
Donc $e_{n+1} = 0{,}70e_n + 0{,}45g_n$.

b. Pour tout entier naturel n, $e_n + g_n = 1$ donc $g_n = 1 - e_n$.
Donc $e_{n+1} = 0{,}70e_n + 0{,}45(1 - e_n)$ et donc $e_{n+1} = 0{,}25e_n + 0{,}45$.

4. **a.** On complète l'algorithme ci-dessous de façon à ce qu'il affiche l'état probabiliste au 1er janvier $(2018+n)$:

$E \longleftarrow 0{,}1$
$G \longleftarrow 0{,}9$
Pour I allant de 1 à N
  $E \longleftarrow 0{,}25 \times E + 0{,}45$
  $G \longleftarrow 1 - E$
Fin Pour
Afficher E et G

b. Pour $N = 3$, l'algorithme affiche : $E \approx 0{,}59$ et $G \approx 0{,}41$.

c. Pour trouver l'état stable $\begin{pmatrix} e & g \end{pmatrix}$ il suffit de résoudre le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{lcr} e & = & 0{,}25e + 0{,}45 \\ e+g & = & 1 \end{array}\right.$$

La première équation donne : $0{,}75e = 0{,}45$ donc $e = \dfrac{0{,}45}{0{,}75} = 0{,}6$. Donc $g = 1 - e = 0{,}4$.

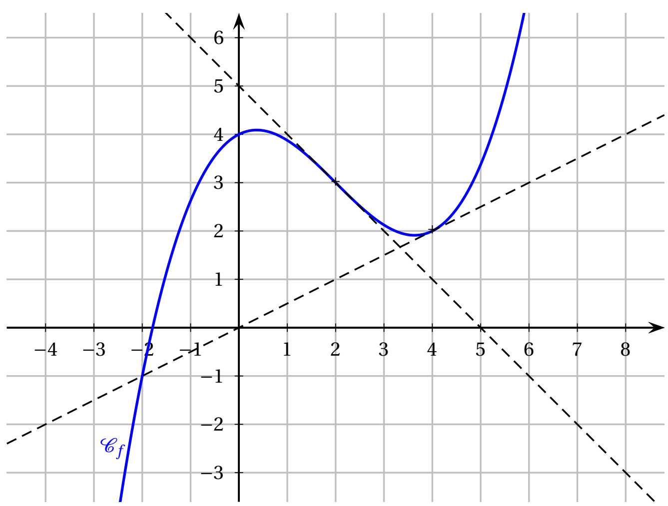
L'état stable est donc $P = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.

Ceci signifie qu'à partir d'un certain nombre d'années la part de marché de l'opérateur *EfficaceRéseau* sera de 60 %.

Exercice 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour les questions **1.** et **2.** et **3.**, on a représenté ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f ainsi que deux de ses tangentes aux points d'abscisses respectives 2 et 4.



1. Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 4 est égale à $\dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$.
Donc $f'(4) = 0{,}5$. **Réponse C.**

2. L'unique point d'inflexion se trouve au point d'abscisse 2, car la tangente à la courbe passe de part et d'autre de celle-ci. La fonction f est donc concave sur l'intervalle $]-\infty\,;\,2]$ puis convexe sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$. La fonction f est donc convexe sur l'intervalle $[2\,;\,5]$. **Réponse D.**

3. En comptant les unités d'aires, on peut estimer l'aire du domaine compris pour x entre 0 et 5, et pour y entre l'axes des abscisses et la courbe représentative de la fonction. Ainsi : $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x \approx 14{,}5$.
La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle se calcule avec la formule :
$\displaystyle\frac{1}{5-0}\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{14{,}5}{5} \approx 2{,}9$. **Réponse C**.

4. Nous savons que : $P(X \leqslant 649) \approx 0{,}1587$ donc (par symétrie), $P(X \geqslant 651) \approx 0{,}1587$.
Donc $P(649 \leqslant X \leqslant 651) = 1 - (P(X \leqslant 649) + P(X \geqslant 651))$
$\approx 1 - 2 \times 0{,}1587 \approx 0{,}6826 \approx 0{,}683$. **Réponse B**.

Exercice 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;25]$ par $f(x) = \dfrac{x+2-\ln(x)}{x}$.

   a. On admet que f est dérivable sur $[1\,;25]$. Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[1\,;25]$:
   $f(x)$ est de la forme $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x+2-\ln(x)$ et $v(x) = x$.
   En écrivant $u'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$,
   $$f'(x) = \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)\times x - (x+2-\ln(x))\times 1}{x^2} = \frac{x-1-x-2+\ln(x)}{x^2} = \frac{-3+\ln(x)}{x^2}$$

   b. Sur $[1\,;25]$, on a $-3+\ln(x) > 0 \iff \ln(x) > 3 \iff x > \mathrm{e}^3$ donc $x \in [\mathrm{e}^3\,;25]$

   c. Pour tout $x \in [1\,;25]$, $f'(x)$ a le même signe que $-3+\ln(x)$.
   $f(\mathrm{e}^3) = \dfrac{\mathrm{e}^3-1}{\mathrm{e}^3} \approx 0{,}950$ et $f(25) = \dfrac{27-\ln(25)}{25} \approx 0{,}951$.
   Donc le tableau de variations de la fonction f sur $[1\,;25]$ est :

x	1		e^3		25
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	$\searrow$	$\dfrac{\mathrm{e}^3-1}{\mathrm{e}^3}$	$\nearrow$	$\dfrac{27-\ln(25)}{25}$

   d. Sur l'intervalle $\left[1\,;\mathrm{e}^3\right]$, la fonction f est continue et strictement décroissante. Or $1{,}5 \in \left[\dfrac{\mathrm{e}^3-1}{\mathrm{e}^3}\,;3\right]$. D'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1{,}5$ admet une unique solution sur l'intervalle $\left[1\,;\mathrm{e}^3\right]$.
   Sur l'intervalle $[\mathrm{e}^3\,;25]$, l'équation $f(x) = 1{,}5$ n'admet aucune solution car
   $1{,}5 \notin \left[\dfrac{\mathrm{e}^3-1}{\mathrm{e}^3}\,;\dfrac{27-\ln(25)}{25}\right]$.
   Donc dans l'intervalle $[1\,;25]$, l'équation $f(x) = 1{,}5$ admet une seule solution.

   e. À l'aide de la calculatrice, $\alpha \in]2{,}31\,;2{,}32[$

2. Une entreprise fabrique chaque jour entre 100 et 2 500 pièces électroniques pour des vidéo-projecteurs. Toutes les pièces fabriquées sont identiques.

On admet que lorsque x centaines de pièces sont fabriquées, avec $1 \leqslant x \leqslant 25$, le coût moyen de fabrication d'une pièce est de $f(x)$ euros.

a. D'après la question **1. c**, le coût minimal est obtenu pour $x = \text{e}^3$ centaines de pièces, soit pour environ 2 009 pièces.

Ce coût minimal sera de $\dfrac{\text{e}^3 - 1}{\text{e}^3}$ soit environ 0,950 euro.

b. D'après la question **1. d**, le nombre minimal de pièces à fabriquer sera de 2,32 centaines de pièces, soit environ 232 pièces.

c. Il sera impossible que le coût moyen d'une pièce soit de 50 centimes (0,50 euro), car sur l'intervalle $[1\,;\,25]$ (de 1 à 2 500 pièces), $f(x) \geqslant \dfrac{\text{e}^3 - 1}{\text{e}^3}$ soit un coût minimal d'environ 0,95 euro.