Corrigé du baccalauréat ES Antilles - Guyane du 18 juin 2019

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

La partie C est indépendante des parties A et B.

Partie A

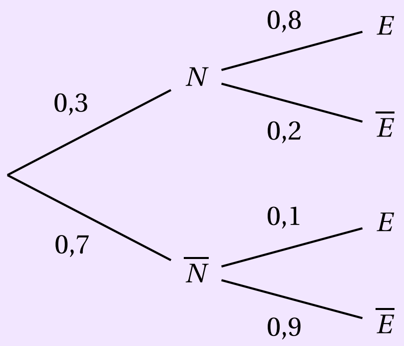
1. **a.** **Solution :**

On se trouve donc dans une situation d'équiprobabilité.

$P(N) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{15}{50} = 0{,}3$

De même, 8 secteurs de la roue parmi les 10 réalisent E, on a donc $P_N(E) = \dfrac{8}{10} = 0{,}8$

b. **Solution :** Avec la même méthode que précédemment on obtient $P_{\overline{N}}(E) = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$



2. **Solution :** On cherche $P(E \cap N)$

$p(E \cap N) = P_N(E) \times p(N) = 0{,}8 \times 0{,}3 = 0{,}24$

3. **Solution :** On cherche $P(E)$

N et $\overline{N}$ forment une partition de l'univers donc, d'après les probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} p(E) &= p(E \cap N) + p\left(E \cap \overline{N}\right) \\ &= P_N(E) \times p(N) + P_{\overline{N}}(E) \times p\left(\overline{N}\right) \\ &= 0{,}24 + 0{,}1 \times 0{,}7 \\ &= 0{,}31 \end{aligned}$$

On a donc bien $p(E) = 0{,}31$.

4. **Solution :** On cherche $p_E(N)$

$p_E(N) = \dfrac{p(N \cap E)}{p(E)} = \dfrac{0{,}24}{0{,}31} \approx 0{,}774.$

Partie B

1. **Solution :** Il y a $n = 100$ répétitions et la probabilité du « succès » est $p = P(E) = 0{,}31$.

X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}31$

2. **Solution :** On cherche $P(X = 30)$

$P(X = 30) = \dbinom{100}{30} \times 0{,}31^{30} \times 0{,}69^{70} \approx 0{,}085$

3. **Solution :** L'espérance de X suivant la loi binomiale de paramètre n et p est $\mathrm{E}(X) = np$
Le nombre moyen de gagnants pour 100 clients participants est donc de $100 \times 0{,}31 = 31$.
Un bon d'achat est de 10€, le montant moyen de la somme totale offerte est de $31 \times 10 = 310$ €, le budget est donc insuffisant.

Partie C

1. **Solution :** On cherche $P(30 \leqslant Y \leqslant 60)$
$P(30 \leqslant Y \leqslant 60) = P\left(\mu - 3\sigma \leqslant Y \leqslant \mu + 3\sigma\right) \approx 0{,}99$
Cela signifie qu'environ 99% des clients restent entre 30 et 60 minutes.

On pouvait évidemment utiliser directement la calculatrice pour trouver ce résultat.

2. **Solution :** On cherche $P(Y \geqslant 50)$
$P\left(\mu - \sigma \leqslant Y \leqslant \mu + \sigma\right) \approx 0{,}68$ donc par symétrie, $P\left(\mu \leqslant Y \leqslant \mu + \sigma\right) \approx 0{,}34$.
On en déduit que $P(45 \leqslant Y \leqslant 50) \approx 0{,}34$
$P(Y \geqslant 50) = 0{,}5 - P(45 \leqslant Y \leqslant 50) \approx 0{,}16$
Cela signifie qu'environ 16% des clients restent plus de 50 minutes.

On pouvait évidemment utiliser directement la calculatrice pour trouver ce résultat.

Exercice 2 **5 points**
Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

1. **Solution :** $u_1 = u_0 + \dfrac{5}{100} \times u_0 + 20 = 125$ et $u_2 = u_1 + \dfrac{5}{100} \times u_1 + 20 = 151{,}25$

2. **Solution :** En un mois, la taille augmente de 5%, elle est donc multipliée par 1,05 puis on ajoute 20 cm.
On a donc bien $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1{,}05 \times u_n + 20$.

3. **a.** **Solution :**

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} &= u_{n+1} + 400\\ &= 1{,}05u_n + 420\\ &= 1{,}05\,(u_n + 400)\\ &= 1{,}05v_n\end{aligned}$$

On en déduit que (v_n) est géométrique de raison $q = 1{,}05$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 400 = 500$

b. **Solution :** $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 1{,}05^n$

c. **Solution :** $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 1{,}05^n$ or $v_n = u_n + 400$
On a donc bien $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 500 \times 1{,}05^n - 400$

d. **Solution :** $u_7 = 500 \times 1{,}05^7 - 400 \approx 304$.
À la fin du 7e mois, le bambou mesurera environ 303 cm.

4. **a.** **Solution :**

Test $u < 200$		vrai	vrai	vrai	vrai	faux
Valeur de u	100	125	151,25	178,81	207,75	
Valeur de n	0	1	2	3	4	

b. **Solution :** À la fin de l'exécution, la valeur de n est 4. Cela signifie qu'il faut attendre la fin du 4[ème] mois pour le bambou mesure au moins 2 m.

c. **Solution :**

```
u ← 50
n ← 0
Tant que u < 1000 faire
    u ← 1,05 × u + 20
    n ← n + 1
Fin Tant que
```

Remarque *: on ne le demande pas mais si on applique cet algorithme on trouve $n = 24$ donc il faut attendre la fin du 24[e] mois, soit 2 ans, pour qu'un bambou de* 50 *cm atteigne ou dépasse* 10 *m.*

Exercice 2 **5 points**

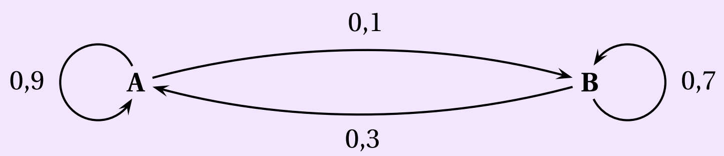
Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. **Solution :** Soit A_n : « Posséder une carte jeune l'année $2018+n$ » et B_n : « Ne pas posséder une carte jeune l'année $2018+n$ »

L'énoncé donne $P_{A_n}(B_{n+1}) = 0{,}1$, $P_{B_n}(A_{n+1}) = 0{,}3$ et $b_0 = 0{,}8$.

On en déduit $P_{A_n}(A_{n+1}) = 1 - P_{A_n}(B_{n+1}) = 0{,}9$, $P_{B_n}(B_{n+1}) = 1 - P_{B_n}(A_{n+1}) = 0{,}7$ et $a_0 = 1 - b_0 = 0{,}2$.



2. **Solution :** $M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$

3. **a.** **Solution :** Soit $P_n = (a_n \,;\, b_n)$ l'état probabiliste à l'année $2018+n$.

On $P_n = P_0 M^n$ avec $P_0 = (a_0 \,;\, b_0) = (0{,}2 \,;\, 0{,}8)$

$(a_2 \,;\, b_2) = P_2 = P_0 M^2 = (0{,}2 \,;\, 0{,}8) \times \begin{pmatrix} 0{,}84 & 0{,}16 \\ 0{,}48 & 0{,}52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}552 & 0{,}448 \end{pmatrix}$

On a donc bien $a_2 = 0{,}552$ et $b_2 = 0{,}448$.

b. **Solution :** Cela signifie qu'en $2018+2 = 2020$, on peut estimer qu'environ 55,2% des 12-18ans auront la carte jeune.

4. **a.** **Solution :** $P = (a \quad b)$ est l'état stable si et seulement si $\left\{\begin{array}{rcl} P &=& PM \\ a+b &=& 1 \end{array}\right.$.

$$\begin{aligned} P = PM &\iff (a \quad b) = (a \quad b) \times \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \\ &\iff (a \quad b) = (0{,}9a + 0{,}3b \quad 0{,}1a + 0{,}7b) \\ &\iff \begin{cases} 0{,}9a + 0{,}3b = a \\ 0{,}1a + 0{,}7b = b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -0{,}1a + 0{,}3b = 0 \\ 0{,}1a - 0{,}3b = 0 \end{cases} \\ &\iff -0{,}1a + 0{,}3b = 0 \end{aligned}$$

Finalement on a bien $\left\{\begin{array}{rcl} -0{,}1a + 0{,}3b &=& 0 \\ a + \quad b &=& 1 \end{array}\right.$

b. **Solution :**
$\left\{\begin{array}{rcl} -0{,}1a + 0{,}3b &=& 0 \\ a + \quad b &=& 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -0{,}1a + 0{,}3(1-a) &=& 0 \\ b &=& 1-a \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 0{,}75 \\ b &=& 0{,}25 \end{array}\right.$
L'état stable est donc $P = (0{,}75 \quad 0{,}25)$ ce qui signifie qu'avec le temps la proportion de la population des 12-18 ans possédant la carte se stabilisera aux alentours de 75%. L'objectif sera donc atteint.

Partie B

1. **Solution :**

```
A ← 0,2
N ← 0
Tant que A < 0,7 faire
    A prend la valeur 0,6A + 0,3
    N prend la valeur N + 1
Fin Tant Que
```

2. **Solution :** L'objectif sera atteint en $2018 + 5 = 2023$.
Méthode 1 : on programme l'algorithme qui va renvoyer $n = 5$
Méthode 2 : on programme la suite (a_n) que l'on sait croissante et on remarque que $a_4 \approx 0{,}68 < 0{,}7$ et $a_5 \approx 0{,}71 > 0{,}7$

Exercice 3 **7 points**
Commun à tous les candidats
Partie A

1. Parmi les quatre valeurs ci-dessous, la meilleure valeur approchée du coefficient directeur de la tangente T est :

a. $-\dfrac{1}{3}$ **b.** -3
c. 3 **d.** $\dfrac{1}{3}$

Solution : Justification non demandée mais donnée ici à titre indicatif
T a évidemment un coefficient directeur négatif, ce qui élimine les réponses **c.** et **d.**
T est très proche de la droite (OA) et l'ordonnée de A est proche 1,5 donc le coefficient directeur de (AO) est d'environ $-\dfrac{1{,}5}{5} = -0{,}3$. Cette valeur est très éloignée de -3 ce qui élimine la réponse **b.**

2. La fonction f semble :

a. concave sur $[-5 ; 0]$ **b.** concave sur $[-10 ; 0]$

c. convexe sur $[-10 ; 5]$ **d.** convexe sur $[-5 ; 5]$

Solution : Justification non demandée mais donnée ici à titre indicatif

Sur $[-5 ; 5]$, $\mathscr{C}_f$ semble être toujours au dessus de se tangentes.

3. L'aire du domaine S, en unité d'aire, appartient à l'intervalle :

a. $[-4 ; -2]$ **b.** $[4 ; 7]$

c. $[0 ; 3]$ **d.** $[7 ; 10]$

Solution : Justification non demandée mais donnée ici à titre indicatif

La réponse **a.** est farfelue puisqu'une aire est positive.

Soit P(3 ; 0) alors le triangle OPB a une aire nettement supérieure à celle du domaine S (d'au moins 1 u.a.).

Or $\mathscr{A}_{\text{OPB}} = \dfrac{15}{2} = 7{,}5$ donc l'aire est inférieure à 6,5 ce qui élimine la réponse **d.**

Le domaine S contient au minimum l'équivalent de 3 rectangles d'une unité d'aire donc on élimine aussi la réponse **c.**

Partie B

1. a. Solution :

$$f = uv + 5 \implies f' = u'v + uv' \text{ avec } \begin{cases} u(x) = x-5 \\ v(x) = \mathrm{e}^{0,2x} \end{cases} \implies \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = 0{,}2\mathrm{e}^{0,2x} \end{cases}$$

donc $f'(x) = \mathrm{e}^{0,2x} + 0{,}2(x-5)\mathrm{e}^{0,2x} = \mathrm{e}^{0,2x} + 0{,}2x\mathrm{e}^{0,2x} - \mathrm{e}^{0,2x}$

On a donc bien $\forall x \in [-10 ; 5]$, $f'(x) = 0{,}2x\mathrm{e}^{0,2x}$.

b. Solution :

$\mathrm{e}^{0,2x} > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x)$ est du signe de x sur $[-10 ; 5]$, on en déduit le tableau suivant :

x	-10		0		5
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$5-15\mathrm{e}^{-2}$	↘	0	↗	5

c. Solution : T est la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse -5

Son coefficient directeur est $f'(-5) = 0{,}2 \times (-5)\mathrm{e}^{0,2\times(-5)} = -\mathrm{e}^{-1} \approx -0{,}368$.

2. a. Solution :

Pour le logiciel, $g = f'$ donc $g' = f''$

On a alors est $f''(x) = \dfrac{1}{25}x\mathrm{e}^{\frac{1}{5}x} + \dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{\frac{1}{5}x} = 0{,}04x\mathrm{e}^{0,2x} + 0{,}2\exp(0{,}2x) = (0{,}2+0{,}04x)\mathrm{e}^{0,2x}$

b. **Solution :** $e^{0,2x} > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc $f''(x)$ est du signe de $(0,2 + 0,04x)$ sur $[-10 ; 5]$, on en déduit le tableau suivant :

x	-10		-5		5
$f''(x)$		-	0	+	
$f'(x)$		↘		↗	

Ce tableau montre que f est convexe sur $[-5 ; 5]$ car f' est croissante et que f est concave sur $[-10 ; -5]$ car f' est décroissante.

*Ce résultat confirme la réponse à la question **2.** de la **partie A**.*

3. **a.** **Solution :**

$$I = \int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^5 = F(5) - F(0) = (-25e + 25) - (-50) = 75 - 25e$$

b. **Solution :**

La droite $\mathcal{D}$ est d'équation $y = x$ donc l'aire cherchée est donnée par $\displaystyle\int_0^5 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^5 = 12,5$ u.a.

c. **Solution :**

L'aire du domaine S est donnée par $\mathcal{A}_S = \mathcal{A}_{\text{BON}} - I = 12,5 - (75 - 25e) = 25e - 62,5 \approx 5,46$ unités d'aire.

*Ce résultat confirme la réponse à la question **3.** de la **partie A**.*

Exercice 4 **3 points**

Commun à tous les candidats

1. **Solution :** $\dfrac{14,7 - 15}{15} \times 100 = -2$

Entre 2014 et 2015, l'entreprise a diminué ses rejets de 2%.

2. **Solution :**

On considère que la baisse annuelle est constante à 2% ce qui correspond à un coefficient multiplicateur de 0,98.

Soit R_n la quantité de rejet de CO_2 en milliers de tonnes à l'année $2014 + n$.

On sait que (R_n) est géométrique de raison $q = 0,98$ et de 1^er^ terme $R_0 = 15$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $R_n = R_0 \times q^n = 15 \times 0,98^n$.

On cherche n tel que $R_n \leqslant 12$.

$$\begin{aligned} R_n \leqslant 12 &\iff 15 \times 0,98^n \leqslant 12 \\ &\iff 0,98^n \leqslant 0,8 \\ &\iff \ln(0,98^n) \leqslant \ln(0,8) \\ &\iff n \ln(0,98) \leqslant \ln(0,8) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0,8)}{\ln(0,98)} \quad \text{car } \ln(0,98) < 0 \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0,8)}{\ln(0,98)} \approx 11,04$, on en déduit que l'inégalité est vérifiée à partir de $n = 12$.

On peut donc conclure qu'à ce rythme, l'objectif fixé sera atteint à partir de $2014 + 12 = 2026$.