**Durée : 3 heures**

# Corrigé du baccalauréat Terminale ES/L – Liban mai 2019

**Exercice 1** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

1. La fonction $u$ somme de fonctions dérivableses est continue et dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
$\forall x \in ]0\,;+\infty[$, $u'(x) = \dfrac{3}{x} - 2$.
Donc $u'(1) = 1$ et d'autre part $u(1) = -1$.
Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_u$ au point d'abscisse 1 a pour équation :
$y - f(1) = u'(1)(x-1)$, soit $y+1 = x-1$ ou $y = x-2$. **Affirmation 1 : Vraie**

2. La fonction ln est une fonction strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$, donc en particulier $\forall x \in \left[\mathrm{e}\,;\,\mathrm{e}^2\right]$, $x \geqslant \mathrm{e} \iff \ln(x) \geqslant \ln(\mathrm{e}) \iff \ln(x) \geqslant 1 \iff \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\ln(x) \geqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$, donc $f(x) \geqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^2} > 0$. Donc la fonction $f$ est positive sur $\left[\mathrm{e}\,;\,\mathrm{e}^2\right]$.
La fonction $f$ est continue sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}\,;\,\mathrm{e}^2\right]$
La fonction $F$ définie pour tout $x$ appartenant à $\left[\mathrm{e}\,;\,\mathrm{e}^2\right]$ par $F(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}(x\ln(x) - x)$ est une primitive de $f$ d'après l'indication.
Or $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{\mathrm{e}^2}(x\ln(x) - x)\right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} = \frac{1}{\mathrm{e}^2}\left((\mathrm{e}^2\ln(\mathrm{e}^2) - \mathrm{e}^2) - (\mathrm{e}\ln(\mathrm{e}) - \mathrm{e})\right) =$
$\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}((2\mathrm{e}^2\ln(\mathrm{e}) - \mathrm{e}^2) - (\mathrm{e} - \mathrm{e})) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}((2\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^2) - \mathrm{e} + \mathrm{e})) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^2} \times \mathrm{e}^2 = 1$.
   - $f$ est une fonction positive et continue;
   - $f$ a pour intégrale sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}\,;\,\mathrm{e}^2\right]$, 1.

   Conclusion $f$ est une fonction de densité sur $\left[\mathrm{e}\,;\,\mathrm{e}^2\right]$ **Affirmation 2 : Vraie**

3. La fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3\mathrm{e}^{-2x+1}$ est continue. Elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$.
Si $G$ est une primitive de $g$ sur $\mathbb{R}$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = g(x)$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = -6 \times \left(-2\mathrm{e}^{-2x+1}\right) = 12\mathrm{e}^{-2x+1} \neq g(x)$.
La fonction $G$ n'est pas une primitive de la fonction $g$. **Affirmation 3 : Fausse**

4. La fonction $h$ est continue et dérivable sur $[-8\,;-0,75]$. En utilisant la formule de la dérivée d'un quotient,
$\forall x \in [-8\,;-0,75]$, $h'(x) = \dfrac{4\times x^2 - (4x+1)\times 2x}{x^4} = \dfrac{-4x^2 - 8x^2 - 2x}{x^4} = \dfrac{-2x - 4x^2}{x^4} = \dfrac{-2-4x}{x^3}$
La fonction $h'$ est continue et dérivable sur $[-8\,;-0,75]$. En utilisant la formule de la dérivée d'un quotient,
$\forall x \in [-8\,;\,-0,75]$, $h''(x) = \dfrac{-4\times x^3 - (-4x-2)\times 3x^2}{x^6} = \dfrac{-4x^3 + 12x^3 + 6x^2}{x^6} = \dfrac{8x^3+6x^2}{x^6} = \dfrac{8x+6}{x^4}$.
$\forall x \in [-8\,;\,-0,75]$, $x^4 > 0$ donc $h''(x)$ a le même signe que $8x+6$.
$8x + 6 \leqslant 0 \iff x \leqslant -\dfrac{6}{8} \iff x \leqslant -0,75$.
Conclusion $h''(x) < 0$ sur $[-8\,;\,-0,75]$, donc $h$ est concave sur $[-8\,;\,-0,75]$. **Affirmation 4 : Vraie**

**Exercice 2** **5 points**

**Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L**

**Partie 1 :** *Modèle* 1

1. $u_1 = u_0 \times q = 97 \times 1{,}63 = 158{,}11$ centaines soit environ 158 centaines de chenilles.
   $u_2 = u_1 \times q = 158{,}11 \times 1{,}63 = 257{,}7193 \approx 257{,}72$ soit environ 258 centaines de chenilles.
   Le 13 juin, il y aura environ 258 centaines de chenilles.
2. La suite $(u_n)$ est géométrique, donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times q^n = 97 \times 1{,}63^n$.
3. $u_0 > 0$ et $q > 1$ donc la suite géométrique $(u_n)$ de premier terme $u_0$ et de raison $q$ est croissante pour tout entier naturel $n$.
4. Le 13 juin 2018 correspond à $n = 12$. Or $u_{12} = 97 \times 1{,}63^{12} \approx 34\,121{,}097$ soit environ 34 121 centaines de chenilles.
   Le 13 juin 2018 il y aura environ 34 121 centaines de chenilles.

**Partie 2 :** *Modèle* 2

1. Le 13 juin 2018 correspond à $n = 12$.
   Ainsi $v_{12} = \dfrac{1}{3}\left(-2\,809 \times 0{,}91^{12} + 3\,100\right) \approx 731{,}4$.
   Le 13 juin 2018 il y aura environ 731 centaines de chenilles.
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n = 0{,}91 v_n + 93 - v_n = -0{,}09 v_n + 93 = -0{,}09 \times \dfrac{1}{3}\left(-2\,809 \times 0{,}91^n + 3\,100\right) + 93$
   $= -0{,}03\left(-2\,809 \times 0{,}91^n + 3\,100\right) + 93 = 84{,}27 \times 0{,}91^n - 93 + 93 = 84{,}27 \times 0{,}91^n$
   $\forall n \in \mathbb{N},\ 0{,}91^n > 0$ donc $84{,}27 \times 0{,}91^n > 0$.
   Conclusion : $v_{n+1} - v_n > 0$. La suite $(v_n)$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

**Partie 3 :** *Comparaison des différents modèles*

1. Le 13 juin correspond à $n = 12$.
   En utilisant le premier modèle $u_{12} = 97 \times 1{,}63^{12} \approx 34\,121{,}1$ soit environ 34 121 centaines et $v_{12} \approx 731$ du même ordre de grandeur que 745.
   Le modèle 2 semble donc être le modèle le plus adapté.
2. **a.** $v_n \geqslant 1\,000 \iff \dfrac{1}{3}\left(-2\,809 \times 0{,}91^n + 3\,100\right) \geqslant 1\,000 \iff -2\,809 \times 0{,}91^n + 3\,100 \geqslant 3\,000$

   $100 \geqslant 2\,809 \times 0{,}91^n \iff \dfrac{100}{2\,809} \geqslant 0{,}91^n \iff \ln\left(\dfrac{100}{2809}\right) \geqslant n \times \ln(0{,}91) \iff \dfrac{\ln\left(\dfrac{100}{2809}\right)}{\ln(0{,}91)} \leqslant n$ car $\ln(0{,}91) < 0$.

   Or $\dfrac{\ln\left(\dfrac{100}{2809}\right)}{\ln(0{,}91)} \approx 35{,}36$ donc $n \geqslant 36$.

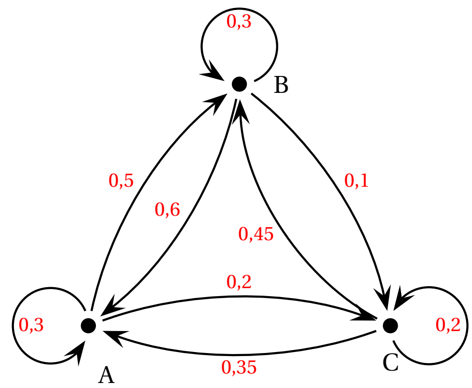
   **b.** Au bout de 36 jours après le 1er juin 2018, soit le 7 juillet 2018, le nombre de chenilles dépassera 1 000 centaines.

**Exercice 2** **5 points**

**Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité**

**Partie 1**

**1.** On a le graphe probabiliste suivant à trois sommets correspondant à la situation décrite :




**2.** Du système suivant $\begin{cases} a_{n+1} &= 0{,}3a_n + 0{,}6b_n + 0{,}35c_n \\ b_{n+1} &= 0{,}5a_n + 0{,}3b_n + 0{,}45c_n \\ c_{n+1} &= 0{,}2a_n + 0{,}1b_n + 0{,}2c_n \end{cases}$ on en déduit que la matrice de transition est

$M = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.35 & 0.45 & 0.2 \end{pmatrix}$

**3.** Comme $P_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}355 & 0{,}405 & 0{,}24 \end{pmatrix}$, on a ensuite

$P_2 = P_1 \times M = \begin{pmatrix} 0{,}355 & 0{,}405 & 0{,}24 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}35 & 0{,}45 & 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4335 & 0{,}407 & 0{,}1595 \end{pmatrix}$

**4.** $\forall n \geqslant 1$, $P_{n+1} = P_n \times M$, donc $P_n = P_1 \times M^{n-1}$.

Le douzième jour correspond à $n = 11$ ; le treizième à $n = 12$. Donc $P_{12} = P_1 \times M^{11}$ et $P_{13} = P_1 \times M^{12}$.

À la calculatrice, on trouve : $P_{12} \approx \begin{pmatrix} 0{,}431 & 0{,}410 & 0{,}159 \end{pmatrix}$ et $P_{13} \approx \begin{pmatrix} 0{,}431 & 0{,}410 & 0{,}159 \end{pmatrix}$.

$P_{12} \approx P_{13}$. L'état d'équilibre est atteint. Les valeurs $a_n$, $b_n$ et $c_n$ n'évolueront presque plus.

Comme $c_{12} \approx c_{13}$, le restaurateur a raison d'affirmer que la proportion des clients qui choisiront le plat C sera d'environ 15,9 % les douzième et treizième jours.

**Partie 2**

**1.** Le tableau suivant donne les degrés des différents sommets :

| Sommet | $H_1$ | $H_2$ | $H_3$ | $H_4$ | $H_5$ | $H_6$ | $H_7$ | $H_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Degré | 3 | 4 | 6 | 2 | 2 | 3 | 4 | 2 |

**a.** Deux sommets sont de degré impair, les sommets $H_1$ et $H_6$. Par conséquent, d'après le théorème d'Euler, ce graphe connexe admet une chaine eulérienne. Il existe un parcours qui emprunte toutes les rues une et une seule fois.

**b.** Un graphe connexe contient un cycle eulérien si et seulement si il ne possède aucun sommet de degré impair (tous ses sommets sont de degré pair). Donc ce graphe n'admet pas de cycle eulérien.

**2.** Pour déterminer le trajet le plus rapide pour aller de B vers A, on utilise l'algorithme de Dijkstra.

| $H_1$ | $H_2$ | $H_3$ | $H_4$ | $H_5$ | $H_6$ | $H_7$ | $H_8$ | Sommet choisi |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 ($H_4$) | $\infty$ | $\infty$ | 0 | 15 ($H_4$) | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $H_1$(80) |
| | 17 ($H_1$) | 24 ($H_1$) | | 15 ($H_4$) | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $H_5$(15) |
| | 17 ($H_1$) | ~~24 ($H_1$)~~<br>22 ($H_5$) | | | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $H_2$ (17) |
| | | 22 ($H_5$)<br>~~40 ($H_2$)~~ | | | 34 ($H_2$) | $\infty$ | $\infty$ | $H_3$ (22) |
| | | | | | ~~34 ($H_2$~~<br>27 ($H_3$) | 26 ($H_3$) | 50 ($H_3$) | $H_7$ (26) |
| | | | | | 27 ($H_3$)<br>~~33 ($H_7$)~~ | | 35 ($H_7$)<br>~~50 ($H_3$)~~ | $H_6$ (27) |
| | | | | | | | 35 ($H_7$)<br>~~36 ($H_6$)~~ | $H_8$ (35) |

Le trajet le plus court de $H_4$ à $H_8$ est de longueur 35 : $H_4 \xrightarrow{15} H_5 \xrightarrow{7} H_3 \xrightarrow{4} H_7 \xrightarrow{9} H_8$.

**Exercice 3** **6 points**

**Commun à tous les candidats**

1. La fonction $f$ est continue et dérivable sur $[-4\,;10]$. En utilisant la formule de la dérivée d'un produit, on obtient $\forall x \in [-4\,;10]$, $f'(x) = 0 + (-8x-10)\,\mathrm{e}^{-0,5x} + (-4x^2-10x+8)\times(-0,5)\,\mathrm{e}^{-0,5x} =$
$\mathrm{e}^{-0,5x}\left[-8x-10-0,5(-4x^2-10x+8)\right] = \mathrm{e}^{-0,5x}(-8x-10+2x^2+5x-4) = \left(2x^2-3x-14\right)\mathrm{e}^{-0,5x}$.
2. $\forall x \in [-4\,;10]$ , $\mathrm{e}^{-0,5x} > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $2x^2-3x-14$.
Ce trinôme du second degré a pour solutions $\left(\Delta = 121 = 11^2 > 0\right)$ : $x_1 = \dfrac{3+11}{4} = \dfrac{7}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3-11}{4} = -2$.
Calculs des valeurs exactes des valeurs intervenant dans le tableau de variation :
$f(-4) = 1 + (-4\times(-4)^2 - 10\times(-4)+8)\,\mathrm{e}^{-0,5\times -4} = 1 - 16\,\mathrm{e}^{2} \approx -117,2 < 0$
$f(-2) = 1 + (-4\times(-2)^2 - 10\times(-2)+8)\,\mathrm{e}^{-0,5\times -2} = 1 + 12\,\mathrm{e} \approx 33,6 > 0$
$f\left(\dfrac{7}{2}\right) = 1 + \left(-4\times\left(\dfrac{7}{2}\right)^2 - 10\times\left(\dfrac{7}{2}\right)+8\right)\mathrm{e}^{-0,5\times\frac{7}{2}} = 1 - 76\,\mathrm{e}^{-\frac{7}{2}} \approx -12,2 < 0.$
$f(10) = 1 + (-4\times(10)^2 - 10\times(10)+8)\,\mathrm{e}^{-0,5\times 10} = 1 - 492\,\mathrm{e}^{-5} \approx -2,3 < 0$
Le tableau de variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $[-4\,;10]$ est :

| $x$ | $-4$ | | $-2$ | | $\frac{7}{2}$ | | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | $-$ | 0 | + | |
| $f(x)$ | $1-16\,\mathrm{e}^{2}$ | $\nearrow$ | $1+12\,\mathrm{e}$ | $\searrow$ | $1-76\,\mathrm{e}^{-\frac{7}{4}}$ | $\nearrow$ | $1-492\,\mathrm{e}^{-5}$ |

3. **a.** Sur l'intervalle $[-4\,;-2]$, la fonction f est continue et strictement croissante. Or $0 \in \left[1-16\,\mathrm{e}^{2}\,;1+12\,\mathrm{e}\right]$. Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée $\alpha$, dans l'intervalle $[-4\,;-2]$.

 **b.** Tableau complété :

| | $m$ | signe de $p$ | $a$ | $b$ | $b-a$ | $b-a>10^{-1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Initialisation | | | $-4$ | $-2$ | 2 | VRAI |
| Après le 1er passage dans la boucle | $-3$ | Négatif | $-4$ | $-3$ | 1 | VRAI |
| Après le 2e passage dans la boucle | $-3{,}5$ | Positif | $-3{,}5$ | $-3$ | 0,5 | VRAI |

**c.** Cet algorithme est un algorithme de dichotomie. Il permet d'obtenir un encadrement de la solution de l'équation $f(x)=0$ dans l'intervalle $[a\,;\,b]$. On peut donc affirmer que $-3{,}1875<\alpha<-3{,}125$.
À l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha\approx-3{,}1511$

**4.** La valeur moyenne de la fonction $f$ sur l'intervalle $[-4\,;\,10]$ se calcule avec la formule :
$\overline{f}=\dfrac{1}{10-(-4)}\displaystyle\int_{-4}^{10}f(x)\,\mathrm{d}x=\overline{f}=\dfrac{1}{10-(-4)}\displaystyle\int_{-4}^{10}f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{14}\left[F(x)\right]_{-4}^{10}=\dfrac{1}{14}\left[\left(10+1408\,\mathrm{e}^{-5}\right)-\left(-4+8\,\mathrm{e}^{2}\right)\right]=$
$\dfrac{-8\,\mathrm{e}^{2}+1408\,\mathrm{e}^{-5}+14}{14}\approx-2{,}54$

**Exercice 4** **5 points**
**Commun à tous les candidats**

**Partie 1**

1. Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui conduit à deux issues : réussite ou échec. Si $p$ est la probabilité de réussite, le probabilité d'échec est $1-p$. Lorsqu'on répète une épreuve de Bernoulli on obtient un schéma de Bernoulli. La loi de probabilité de la variable aléatoire égale au nombre de succès d'un schéma de Bernoulli s'appelle une loi binomiale.
   Si $n$ est le nombre de répétitions de l'expérience et $p$ la probabilité de réussite de chacune, on note cette loi $\mathscr{B}(n;p)$. Donc $X\sim\mathscr{B}(300\,;\,0{,}72)$
2. $p(X=190)=\dbinom{190}{300}\times0{,}72^{190}\times(1-0{,}72)^{300-190}\approx0{,}0002$.
3. $P(X\geqslant220)=1-P(X<220)=1-P(X\leqslant219)$.
   À l'aide de la calculatrice, $P(X\geqslant220)\approx0{,}3291$.

**Partie 2**

1. Le trinôme du second degré $2x^2-7x-4$ admet deux racines distinctes $\left(\Delta=81=9^2>0\right)$ : $x_1=\dfrac{7-9}{4}=-\dfrac{1}{2}$ et $x_2=\dfrac{7+9}{4}=4$.
   Donc le signe de ce trinôme selon les valeurs de $x\in\mathbb{R}$ est :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $4$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $2x^2-7x-4$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

   Donc $\mathscr{S}=\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[4\,;+\infty\right[$.
2. On utilise ici les formules des lois uniformes. On choisit un nombre au hasard dans l'intervalle $[0\,;\,10]$. Si ce nombre fait partie de l'ensemble solution précédent, alors il appartient à l'intervalle $[4\,;\,10]$.
   La probabilité que ce nombre soit solution de l'inéquation précédente est égale à : $p=\dfrac{10-4}{10-0}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$.

**Partie 3**

1. $Z \sim \mathcal{N}\left(2{,}3\ ;\ 0{,}11^2\right)$
   **a.** À l'aide de la calculatrice, $P(2{,}18 \leqslant Z \leqslant 2{,}42) \approx 0{,}72$
   **b.** $P(Z \geqslant 2{,}25) = P(2{,}25 \leqslant Z \leqslant 2{,}3) + P(Z \geqslant 2{,}3) = 0{,}5 + P(2{,}25 \leqslant Z \leqslant 2{,}3)$
   À l'aide de la calculatrice, $P(Z \geqslant 2{,}25) \approx 0{,}68$.
2. $Z \sim \mathcal{N}(2{,}3\ ;\ \sigma^2)$.
   De plus $P(2{,}18 \leqslant Z \leqslant 2{,}42) \approx 0{,}95$.
   Or $P(\mu - 2\sigma \leqslant Z \leqslant \mu + 2\sigma) = P(2{,}3 - 2\sigma \leqslant Z \leqslant 2{,}3 + 2\sigma) \approx 0{,}95$ donc $2{,}3 - 2\sigma = 2{,}18$ (ou $2{,}3 + 2\sigma = 2{,}52$) donc $\sigma = \dfrac{2{,}3 - 2{,}18}{2} = 0{,}06$.
   Donc $Z \sim \mathcal{N}\left(2{,}3\ ;\ 0{,}06^2\right)$