Durée : 3 heures

∽ Corrigé du baccalauréat ES/L - Métropole - La Réunion ∾ 21 juin 2019

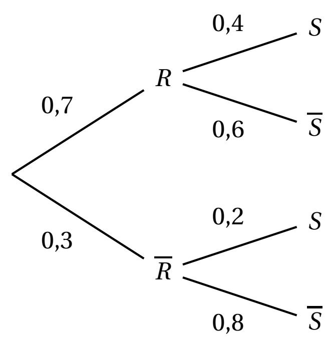
Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.

1. *Pour tout évènement E, on note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E.*

On considère l'arbre pondéré suivant :



Affirmation 1 : La probabilité de $\overline{R}$ sachant S est 0,06.

On a $P_S\left(\overline{R}\right) = \dfrac{P\left(S \cap \overline{R}\right)}{P(S)}$.

- $P\left(S \cap \overline{R}\right) = P\left(\overline{R} \cap S\right) = P\left(\overline{R}\right) \times P_{\overline{R}}(S) = 0,3 \times 0,2 : 0,06$.
- D'après la loi des probabilités totales :

$P(S) = P(R \cap S) + P\left(\overline{R} \cap S\right) = P(R) \times P_R(S) + P\left(\overline{R}\right) \times P_{\overline{R}}(S) = 0,7 \times 0,4 + 0,3 \times 0,2 = 0,28 + 0,06 = 0,34$.

Donc $\dfrac{P\left(S \cap \overline{R}\right)}{P(S)} = \dfrac{0,28}{0,34} = \dfrac{28}{34} = \dfrac{14}{17} \approx 0,82$: l'affirmation est fausse.

2. Soit k un réel tel que $0 \leqslant k < 18$. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[k\,;\,18]$. On suppose que l'espérance de X est égale à 12.

Affirmation 2 : La valeur de k est 9.

L'espérance de Xsur $[k\,;\,18]$ est égale à $\dfrac{k+18}{2} = 12 \iff k + 18 = 24 \iff k = 6$: l'affirmation est fausse.

3. On considère l'équation suivante :

$$\ln\left(x^2\right) - \ln\left(\frac{x^5}{\mathrm{e}}\right) + \ln(2) = \ln(2x) + 5.$$

Affirmation 3 : $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ est l'unique solution de cette équation.

On cherche des solutions dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$ pour que $\ln\left(\dfrac{x^5}{\mathrm{e}}\right)$ et $\ln(2x)$ soient définis.

$\ln\left(x^2\right)-\ln\left(\dfrac{x^5}{\mathrm{e}}\right)+\ln(2)=\ln(2x)+5 \iff \ln\dfrac{x^2}{\frac{x^5}{\mathrm{e}}}+\ln 2-\ln(2x)=5 \iff \ln\dfrac{\mathrm{e}}{x^3}+\ln\dfrac{2}{2x}=5 \iff$ $\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}}{x^3}\right)+\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=5 \iff \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}}{x^3}\times\dfrac{1}{x}\right)=5 \iff \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}}{x^4}\right)=5 \iff \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}}{x^4}\right)=\ln\left(\mathrm{e}^5\right)$, d'où par croissance de la fonction logarithme :

$\dfrac{\mathrm{e}}{x^4}=\mathrm{e}^5 \iff \dfrac{1}{x^4}=\mathrm{e}^4 \iff \dfrac{1}{x}=\mathrm{e} \iff x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$: l'affirmation est vraie.

4. Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[0\,;15]$. On suppose que sa fonction dérivée, notée f', est continue sur $[0\,;15]$. Les variations de f' sont représentées dans le tableau ci-dessous.

x	0	5	15
$f'(x)$	30 ↘	-5	↗ 20

Affirmation 4 : La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet une et une seule tangente parallèle à l'axe des abscisses.

D'après le tableau de variations de f', cette dérivée s'annule sur l'intervalle $[0\,;5]$ et sur l'intervalle $[5\,;15]$. Il existe donc $a\in[0\,;5[$ tel que $f'(a)=0$ et $b\in]5\,;15]$ tel que $f'(b)=0$. En ces deux points distincts le nombre dérivé est nul ce qui signifie que les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ sont horizontales : l'affirmation est fausse.

Affirmation 5 : La fonction f est convexe sur $[5\,;15]$.

D'après le tableau de variations f est décroissante sur $[5\,;b]$ et croissante sur $[b\,;15]$; comme f' est croissante sur $[5\,;15]$, la fonction f est convexe sur cet intervalle : affirmation vraie.

Exercice 2 **5 points**

Candidats de ES n'ayant pas suivi la spécialité ou candidats de L

En 2018, Laurence, souhaitant se lancer dans l'agriculture biologique, a acheté une ferme de 14 hectares de pommiers. Elle estime qu'il y a 300 pommiers par hectare. Chaque année, Laurence élimine 4 % des pommiers existants et replantera 22 nouveaux pommiers par hectare.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de pommiers par hectare l'année $2018+n$. On a ainsi $u_0=300$.

1. a. Soit u_n le nombre de pommier par hectare l'année n ; l'année suivante supprimer 4 % revient à multiplier u_n par $1-\dfrac{4}{100}=1-0{,}04=0{,}96$.
Il restera donc $0{,}96\times u_n$ et en plantant 22 pommiers il y aura donc l'année $n+1$:

$$u_{n+1}=0{,}96u_n+22.$$

b.
- En 2019, $n=1$, donc $u_1=0{,}96u_0+2=0{,}96\times300+22=288+22=310$;
- En 2020, $n=2$, donc $u_2=0{,}96u_1+22=0{,}96\times310+22=297{,}6+22=319{,}6$ soit 320 pommiers à l'unité près.

2.

a.

```
N ← 0
U ← 300
Tant que U ⩽ 400
        N ← N + 1
        U ← 0,96 × U + 22
Fin Tant que
```

b. On peut programmer l'algorithme et faire afficher la valeur de N.

Sur une calculatrice en entrant 300, puis $*0{,}96 + 22$, il faut appuyer 13 fois sur la touche Entrée pour obtenir plus de 400 : $u_{12} \approx 396{,}8$ et $u_{13} \approx 402$, donc $N = 13$.

3. a. On a quel que soit le naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 550 = 0{,}96u_n + 22 - 550$

$v_{n+1} = 0{,}96u_n - 528 = 0{,}96\left(u_n - \dfrac{528}{0{,}96}\right) = 0{,}96\,(u_n - 550) = 0{,}96v_n$.

Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\quad v_{n+1} = 0{,}96v_n$: cette relation montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,96, de premier terme $v_0 = u_0 - 550 = 300 - 550 = -250$.

b. On sait qu'alors quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\quad v_n = v_0 \times 0{,}96^n$, soit :

$$v_n = -250 \times 0{,}96^n.$$

Or $v_n = u_n - 550$ donc $u_n = v_n + 550 = -250 \times 0{,}96^n + 550$.

Finalement quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = 550 - 250 \times 0{,}96^n$.

c. 2025 correspond à $n = 7$.

$u_7 = 550 - 250 \times 0{,}96^7 \approx 362{,}1$, donc 362 pommiers à l'unité près par hectare.

Or l'exploitation de Laurence a une superficie de 14 hectares.

Elle devrait donc avoir en 2025 :

$14 \times u_7 = 14\left(550 - 250 \times 0{,}96^7\right) \approx 5\,069{,}9$ soit 5 070 pommiers à l'unité près.

d. On a $u_n > 400 \iff 550 - 250 \times 0{,}96^n > 400 \iff 150 > 250 \times 0{,}96^n \iff \dfrac{150}{250} > 0{,}96^n \iff 0{,}6 > 0{,}96^n \iff \ln 0{,}6 > n \ln 0{,}96$ (par croissance de la fonction logarithme népérien), d'où $n > \dfrac{\ln 0{,}6}{\ln 0{,}96}$ (car $\ln 0{,}96 < 0$).

Or $\dfrac{\ln 0{,}6}{\ln 0{,}96} \approx 12{,}5$. On retrouve bien que la plus petite valeur solution de l'inéquation est 13.

Exercice 2 **5 points**

Candidats de ES ayant suivi la spécialité

Pour se rendre à l'université, Julie peut emprunter deux itinéraires, l'un passant par les routes départementales, l'autre par une voie rapide. Elle teste les deux itinéraires.

Lorsque Julie emprunte la voie rapide un jour, la probabilité qu'elle emprunte le même itinéraire le lendemain est de 0,6.

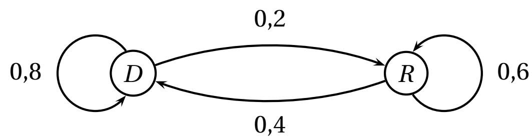
Lorsque Julie emprunte les routes départementales un jour, la probabilité qu'elle emprunte la voie rapide le lendemain est de 0,2.

Le premier jour, Julie emprunte la voie rapide.

On note :

- D l'évènement « Julie emprunte les routes départementales » ;
- R l'évènement « Julie emprunte la voie rapide ».

1. a.



b. On a $M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

2. a. $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$

b. $M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}64+0{,}08 & 0{,}16+0{,}12 \\ 0{,}32+0{,}24 & 0{,}08+0{,}36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}72 & 0{,}28 \\ 0{,}56 & 0{,}44 \end{pmatrix}$.

On a donc $P_3 = P_1 \times M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}72 & 0{,}28 \\ 0{,}56 & 0{,}44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}56 & 0{,}44 \end{pmatrix}$.

La probabilité que Julie emprunte les routes départementales le 3$^{\text{e}}$ jour est égale à 0,44.

3. a. Pour tout entier naturel n non nul, $P_{n+1} = P_n \times M$ ou encore

$\begin{pmatrix} d_{n+1} & r_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_n & r_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8d_n + 0{,}4r_n & 0{,}2d_n + 0{,}6r_n \end{pmatrix}$. Conclusion :

quel que soit n naturel non nul, $\left\{ \begin{array}{lcl} d_{n+1} & = & 0{,}8d_n + 0{,}4r_n \\ r_{n+1} & = & 0{,}2d_n + 0{,}6r_n \end{array} \right.$.

b. L'algorithme 1 ne calcule ni d_3 ni r_3.
L'algorithme 2 calcule d_4 et r_4 (trois étapes).
Seul l'algorithme 3 calcule d_3 et r_3.

4. On a démontré que quel que soit n naturel non nul, $r_{n+1} = 0{,}2d_n + 0{,}6r_n$.
Or on sait que $d_n + r_n = 1 \iff d_n = 1 - r_n$, soit en remplaçant dans la première égalité :
$r_{n+1} = 0{,}2(1 - r_n) + 0{,}6r_n = 0{,}2 - 0{,}2r_n + 0{,}6r_n = 0{,}2 + 0{,}4r_n$.
On a donc quel que soit le naturel n non nul : $r_{n+1} = 0{,}4r_n + 0{,}2$.

5. On définit la suite (v_n) par $v_n = r_n - \dfrac{1}{3}$ pour tout entier naturel n non nul.

a. Au rang $n+1$, on a donc :
$v_{n+1} = r_{n+1} - \dfrac{1}{3}$ et en utilisant le résultat de la question précédente :
$v_{n+1} = 0{,}4r_n + 0{,}2 - \dfrac{1}{3} = 0{,}4r_n + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{3} = 0{,}4r_n + \dfrac{3-5}{15} = 0{,}4r_n - \dfrac{2}{15} = \dfrac{2}{5}r_n - \dfrac{2}{15} = \dfrac{2}{5}\left(r_n - \dfrac{1}{3}\right)$.
Conclusion quel que soit le naturel n non nul :
$v_{n+1} = \dfrac{2}{5}v_n$, égalité qui montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$, de premier terme $v_1 = r_1 - \dfrac{1}{3} = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

b. On sait que quel que soit le naturel $n \geqslant 1$, $\quad v_n = v_1 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$, soit $v_n = \dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$.

Or $v_n = r_n - \dfrac{1}{3} \iff r_n = v_n + \dfrac{1}{3}$ donc $r_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{5}{2} \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{5}{3} \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n}$,

ce qui donne bien $r_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} \times 0{,}4^{n-1} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{5}{3} \times 0{,}4^{n}$.

c. Comme $0 < \dfrac{2}{5} < 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1} = 0$, d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} r_n = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Les trois parties peuvent être traitées de manière indépendante.
Les résultats seront arrondis au centième.

Partie A

1. La probabilité qu'il y ait pénurie d'eau est égale à $P(D < 8) = P(D \leqslant 5{,}5) - P(8 \leqslant D \leqslant 15{,}5) \approx 0{,}5 - 0{,}39$ d'après la calculatrice. La probabilité qu'il y ait pénurie d'eau est environ 0,11.
2. Il n'y a pas de problème quand $8 \leqslant D \leqslant 26$. Or d'après la calculatrice $P(8 \leqslant D \leqslant 15{,}5) \approx 0{,}85$.
3. On sait que $P(\mu - 2\sigma \leqslant D \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954$.
   Or ici $\mu - 2\sigma = 3{,}5$ et $\mu + 2\sigma = 27{,}5$.
   Donc au centième près $P(3{,}5 \leqslant D \leqslant 27{,}5) \approx 0{,}95$.

Partie B

1. À chaque relevé la probabilité que ce soit l'équipe de Sébastien qui effectue celui-ci est égale à $\dfrac{1}{4} = 0{,}25$ et les choix relevant du hasard, on peut dire que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}25$.
2. On a $P(x = 4) = \dbinom{10}{4} \times 0{,}25^4 \times (1 - 0{,}25)^4 \approx 0{,}1459$ soit environ 0,15.
3. On a $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1) \approx 1 - 0{,}244 \approx 0{,}76$.
   La probabilité qu'au moins 2 relevés soient effectués par l'équipe de Sébastien est environ 0,76.

Partie C

Si l'échantillon est de taille n, l'amplitude de l'intervalle de confiance est égale à $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.
Il faut donc résoudre $\dfrac{2}{\sqrt{n}} < 0{,}1 \iff \dfrac{20}{\sqrt{n}} < 1 \iff 20 < \sqrt{n} \Rightarrow 400 < n$.
Conclusion : il faut plus de 400 relevés pour obtenir une estimation de la proportion p de relevés de qualité « satisfaisante » avec une précision inférieure à 0,1.

Exercice 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. On lit $f(0) \approx 112$ et $f(60) \approx 70$.
2. Puisque A de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 7 est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$, on sait que $f''(7) = 0$.
3. **a.** Voir l'annexe 2.
   b. La surface contient le rectangle de dimensions 70 et 60 soit une aire d'au moins 4 200 unités d'aire : l'estimation de l'ébéniste est inférieure à la réalité.

Partie B

1. La fonction f est dérivable car produit de sommes de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0\,;60]$.
   La dérivée de la constante étant nulle, il faut dériver $u(x) \times v(x)$, avec
   $u(x) = 14x + 42$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}$, on obtient :
   $u'(x) = 14$ et $v'(x) = -\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}$. Donc
   $$f'(x) = 14\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}} + (14x + 42) \times \left(-\frac{1}{5}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}} = \mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}\left(14 - \frac{14x + 42}{5}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}\left(\frac{70 - 14x - 42}{5}\right)$$
   $$= \mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}\left(\frac{28 - 14x}{5}\right).$$

2. **a.** Comme $5 > 0$ et que quel soit le réel x, $\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de la différence $28 - 14x = 14(2 - x)$.

On voit aisément que si $0 \leqslant x < 2$, alors $2 - x > 0$: la dérivée est positive sur $[0\,;\,2[$;

$f'(2) = 0$;

si $x > 2$, alors $2 - x < 0$: la dérivée est négative sur $]2\,;\,60]$.

b. On déduit des résultats précédents le tableau de variations de la fonction f :

x	0		2		60
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	112	↗	≈ 117	↘	≈ 70

Avec $f(0) = 70 + 42 = 112$; $f(2) = 70 + 70\mathrm{e}^{-0,4} \approx 116,922$ et $f(60) = 70 + 882\mathrm{e}^{-12} \approx 70,0054$.

3. Le logiciel indique que $f''(x) = 14\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}x} \times \dfrac{x-7}{25}$.

Comme $\dfrac{14}{25} > 0$ et que quel soit le réel x, $\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}x} > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de $x - 7$.

Donc $f''(x) = 0 \iff x = 7$, ce qui montre que la fonction a un point d'inflexion pour $x = 7$.

De plus $f''(x) < 0 \iff x - 7 < 0 \iff x < 7$, donc la fonction est concave sur $[0\,;\,7]$;

$f''(x) > 0 \iff x - 7 > 0 \iff x > 7$, donc la fonction est convexe sur $[7\,;\,60]$.

4. **a.** G produit de fonctions dérivables sur $[7\,;\,60]$ est dérivable et sur cet intervalle :

$G'(x) = -70\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}} - \dfrac{1}{5} \times (-70x - 560)\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}} = -70\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}} + (14x + 112)\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}} = \mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}(-70 + 14x + 112) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}(14x + 42) = g(x)$, ce qui démontre que G est une primitive de g sur $[0\,;\,60]$.

b. Comme pour tout x de $[0\,;\,70]$, $f(x) = g(x) + 70$, une primitive de f est la fonction $G(x) + 70x = 70x + (-70x - 560)\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}$.

c. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\int_0^{60} f(x)\,\mathrm{d}x &= \left[70x + (-70x - 560)\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}\right]_0^{60}\\ &= \left(70 \times 60 + (-70 \times 60 - 560)\ \mathrm{e}^{-\frac{60}{5}}\right) - \left(70 \times 0 + (-70 \times 0 - 560)\ \mathrm{e}^{-\frac{0}{5}}\right)\\ &= 4\,200 - 4\,760\,\mathrm{e}^{-12} - (-560) = 4\,760 - 4\,760\,\mathrm{e}^{-12}.\end{aligned}$$

Comme $4\,760\,\mathrm{e}^{-12} \approx 0,03$, on a donc $\displaystyle\int_0^{60} f(x)\,\mathrm{d}x \approx 4\,760$ à l'unité près.

Partie C

L'ébéniste découpe 2 accoudoirs identiques sur le modèle de la surface hachurée de l'annexe 2 en choisissant comme unité le cm.

Il souhaite vernir les deux faces de chaque accoudoir (**annexe 1**) ainsi que le dossier du fauteuil dont l'aire est égale à 5 400 cm^2. Or il lui reste le quart d'un petit pot de vernis pouvant couvrir 10 m^2.

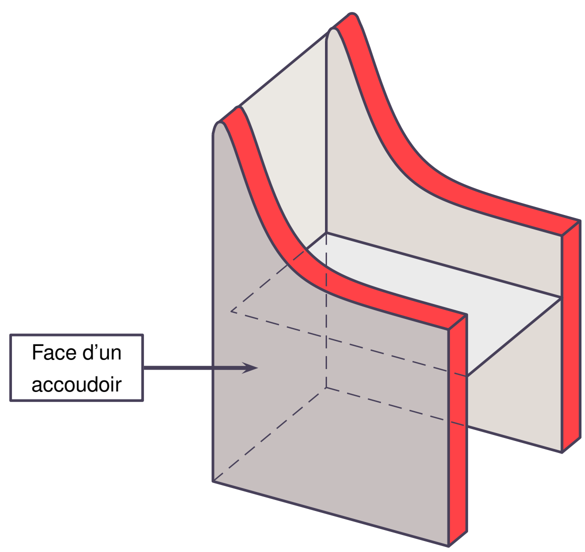
Il y a 2 accoudoirs à vernir sur les 2 faces, ce qui fait 4 faces en tout. La surface à vernir est, en cm^2, d'environ $4 \times 4760 + 5400 = 24440$ soit 2,444 m^2.

Il a un quart de pot qui couvre 10 m^2 donc il peut vernir 2,5 m^2.

L'ébéniste aura donc assez de vernis.

Annexes : à rendre avec la copie

Exercice 4
Annexe 1 : ébauche du fauteuil



Annexe 2