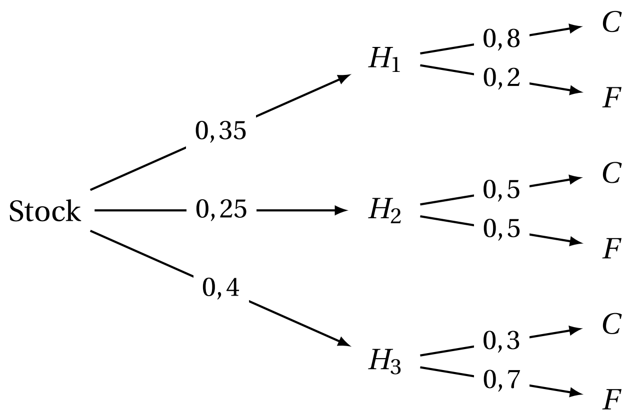
Corrigé du baccalauréat S Métropole 20 juin 2013

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Puisque le choix de l'arbre se fait au hasard dans le stock de la jardinerie, on assimile les proportions données à des probabilités.

1. **a.** L'arbre pondéré traduisant cette situation est :



   b. On cherche à calculer la probabilité de l'intersection $H_3 \cap C$, donc : $P(H_3 \cap C) = P(H_3) \times P_{H_3}(C) = 0,4 \times 0,3$. On a donc $P(H_3 \cap C) = 0,12$.

   c. Puisque la jardinerie ne se fournit qu'auprès de trois horticulteurs, les événements H_1, H_2 et H_3 forment une partition de l'univers. On peut donc appliquer la loi des probabilités totales, et on en déduit :
   $P(C) = P(H_1) \times P_{H_1}(C) + P(H_2) \times P_{H_2}(C) + P(H_3) \times P_{H_3}(C) =$
   $0,35 \times 0,8 + 0,25 \times 0,5 + 0,4 \times 0,3 = 0,525$.

   d. On cherche cette fois à calculer une probabilité conditionnelle :
   $P_C(H_1) = \dfrac{P(H_1 \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,35 \times 0,8}{0,525} \approx 0,533$.

2. **a.** Nous avons un schéma de Bernoulli (l'arbre choisi est-il un conifère ?), avec une probabilité de succès de $0,525$ qui est répété 10 fois de façon indépendante (puisque l'on suppose que les choix successifs peuvent être assimilés à un tirage au sort avec remise), donc la variable aléatoire X suit bien une loi binomiale de paramètres 10 et $0,525$.

   b. La probabilité demandée ici est celle de l'événement $X = 5$, et donc :
   $P(X = 5) = \dbinom{10}{5} \times 0,525^5 \times (1 - 0,525)^5$ Finalement $P(X = 5) \approx 0,243$.

   c. Cette fois, la probabilité demandée est celle de $X \leqslant 8$, qui est l'événement contraire de la réunion des événements disjoints $X = 9$ et $X = 10$. On a alors : $P(X \leqslant 8) = 1 - P(X = 9) - P(X = 10) \approx 0,984$.

EXERCICE 2 **7 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** On lit $f(1) = y_B = 2$ et pour $f'(1)$, on lit le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1, c'est à dire le coefficient directeur de la droite (CB), qui est horizontale, donc $f'(1) = 0$.

   b. La fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, en tant que quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle (le dénominateur ne s'annulant pas sur cet intervalle). On a :

   $$f'(x) = \frac{\left(0 + b \times \frac{1}{x}\right) \times x - (a + b\ln x) \times 1}{x^2} = \frac{b - (a + b\ln x)}{x^2}$$

   Soit effectivement : $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$.

   c. On en déduit : $f(1) = \dfrac{a + b\ln(1)}{1} = a + 0 = a$, or d'après le **1. a.**, $f(1) = 2$, donc $a = 2$.

   Dès lors, on a $f'(1) = \dfrac{(b-2) - b\ln(1)}{1^2} = b - 2$, or d'après le **1. a.**, $f'(1) = 0$, donc $b = 2$.

2. **a.** On reprend la forme de f' obtenue précédemment, en remplaçant a et b par 2, et on a :

   $f'(x) = \dfrac{-2\ln x}{x^2} = \dfrac{2}{x^2} \times (-\ln x)$.

   Puisque pour tout x élément de $]0\ ;\ +\infty[$, $\dfrac{2}{x^2}$ est un nombre strictement positif, on en déduit que la dérivée de f a bien le même signe que $-\ln x$ pour tout x élément de $]0\ ;\ +\infty[$.

   b. Quand x tend vers 0 : $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ donc, par limite d'un produit et d'une somme : $\lim\limits_{x \to 0} 2 + 2\ln x = -\infty$. Comme par ailleurs $\lim\limits_{x \to 0} x = 0^+$, alors, par limite d'un quotient, on a $\lim\limits_{0} f = -\infty$.

   Quand x tend vers $+\infty$, on va utiliser la forme de f présentée dans la question : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, d'après la propriété des croissances comparées, et donc par limite d'une somme, puis par produit par 2 : $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

   c. On peut donc dresser le tableau des variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$-\ln x$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

3. **a.** La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$ et 1 est une valeur strictement comprise entre $\lim\limits_{0} f$ et $f(1)$, donc l'application du corollaire au théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'une unique solution à l'équation $f(x) = 1$ sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$, qui sera notée α.

b. Par balayage à la calculatrice, on obtient $f(5) > 1$ et $f(6) < 1$, donc comme la fonction f est continue sur $[5\ ;\ 6]$, le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'au moins une solution à l'équation $f(x) = 1$ sur l'intervalle $[5\ ;\ 6]$, et puisque l'on avait admis qu'il n'y avait qu'une seule solution β à cette équation sur $]1\ ;\ +\infty[$, cette solution est donc entre 5 et 6. Enfin, puisque ni 5 ni 6 n'ont une image exactement égale à 1, on peut dire que β est strictement entre 5 et 6. Le nombre entier n cherché est donc 5.

4. **a.** On obtient :

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0	0	0,25	0,375	0,4375
b	1	0,5	0,5	0,5	0,5
$b-a$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
m	0,5	0,25	0,375	0,4375	
$f(m)$	$\approx 1,23$	$\approx -3,09$	$\approx 0,10$	$\approx 0,79$	$\approx 1,03$

Le tableau a été complété par la ligne « $f(m) \approx$ » pour montrer les affectations à a ou à b.

Le tableau précédent sera probablement considéré comme correct, mais si on interprète la question très rigoureusement, d'un point de vue algorithmique, on doit supposer que l'étape 1 est l'initialisation, et les étapes de 2 à 5 correspondant aux itérations de 1 à 4. Dans ce cas, pour l'étape 1 n'a pas de valeur m, et la valeur $b-a$ va servir à savoir si l'itération suivante va être utile ou non. Dans ce cas, on va écrire dans la colonne les valeurs en mémoire à la fin de l'itération de la boucle « Tant que », ce qui donne le tableau suivant :

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0	0	0,25	0,375	0,4375
b	1	0,5	0,5	0,5	0,5
$b-a$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
m		0,5	0,25	0,375	0,4375

b. Cet algorithme renvoie les deux bornes obtenues pour encadrer le nombre α par dichotomie, avec une amplitude au plus égale à 0,1.

c. Pour que l'algorithme donne un encadrement de β avec la même précision, il faut modifier l'initialisation, en mettant :

Affecter à a la valeur 5.

Affecter à b la valeur 6.

Puis, dans le traitement, modifier le test « Si » pour qu'il soit : « Si $f(m) > 1$ », afin de prendre en compte la décroissance de f sur l'intervalle $[5\ ;\ 6]$.

(Une autre possibilité serait d'affecter 6 à a et 5 à b, et de modifier le « tant que » pour avoir « tant que $a-b>0,1$ » et alors a serait la borne haute de l'encadrement, et b la borne basse).

5. **a.** Pour répondre à cette question, on commence par déterminer l'aire du rectangle, de largeur 1 et de hauteur 2 : son aire est donc de 2 unités d'aire. Il faut ensuite déterminer l'aire délimitée par la courbe $\mathscr{C}$ dans le rectangle $OABC$, et pour cela, il faut commencer par déterminer qu'elle est l'abscisse de l'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses, et donc résoudre :

   $f(x)=0 \iff 2(1+\ln x)=0$, c'est à dire résoudre : $\ln x=-1$, qui par application de la fonction exponentielle, donne une unique solution, qui est $\mathrm{e}^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

   Sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}}\ ;\ 1\right]$, la fonction f est positive et continue, et donc l'aire délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $x=1$ est donnée par : $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$, en unités d'aire.

   Pour que la courbe $\mathscr{C}$ partage le rectangles en deux domaines d'aires égales, il faut alors que l'aire sous cette courbe soit la moitié de l'aire du rectangle, c'est à dire une unité d'aire.

   La résolution du problème reviendra bien à démontrer :

   $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=1.$

   b. On a $f(x)=2\times\dfrac{1}{x}+2\times\dfrac{1}{x}\times\ln x$. En posant $u=\ln$, on reconnait alors : $f=2u'+2u'u$.

   Une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$ est donc : $F=2u+u^2$, c'est à dire $F(x)=2\ln x+(\ln x)^2$.

   On a alors $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=\Big[F(x)\Big]_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1}=F(1)-F\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$

   $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=2\ln 1+(\ln 1)^2-\left[2\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)+\left(\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)\right)^2\right]=0-(-2+1)=1.$

   On arrive donc bien à la conclusion que le rectangle $OABC$ est bien partagé en deux domaines de même aire par la courbe $\mathscr{C}$.

EXERCICE 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

1. **Vrai :** Si on pose A, le point d'affixe i et B le point d'affixe -1 dans le plan complexe, alors puisque M est le point d'affixe z, on a : $|z-\mathrm{i}|=|z_M-z_A|=AM$. De même $|z+1|=MB$, et donc l'ensemble des points M recherché est l'ensemble des points équidistants de A et de B, c'est à dire la médiatrice du segment $[AB]$, c'est donc bien une droite.

2. **Faux :** On remarque que $1+\mathrm{i}\sqrt{3} = 2\times\left(\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. En utilisant les propriétés des modules et des arguments des nombres complexes, on a : $\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^4 = 2^4\times\mathrm{e}^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}}$. Un argument du nombre complexe étudié est donc $\dfrac{4\pi}{3}$ qui n'est congru ni a 0 ni à π modulo 2π, donc le nombre n'est pas réel.

3.

Méthode 1 **Vrai :** Après avoir choisi un repère orthonormé, calculons le produit scalaire p des deux vecteurs :

$p=\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{BG}=\left(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FC}\right)\cdot\overrightarrow{BG}$, d'après la relation de Chasles.

$p=\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{BG}$, par distributivité du produit scalaire sur l'addition de vecteurs.

Par ailleurs, les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont orthogonaux, car ce dernier est orthogonal à la face $BCGF$ qui contient le premier vecteur.

De plus les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{FC}$ sont également orthogonaux, car ils sont construits sur les diagonales d'un carré $BCGF$, qui sont perpendiculaires entre elles (comme toutes les diagonales de losanges).

Finalement, p est la somme de deux produits scalaires nuls, donc p est lui même nul, ce qui, par définition signifie que les droites (BC) et (CG) sont orthogonales.

Méthode 2 : Les faces $BCGF$ et $AEHD$ sont des carrés, donc les segments $[BG]$ et $[FC]$ d'une part, $[ED]$ et $[AH]$ d'autre part sont perpendiculaires.

Le plan médiateur de $[BG]$ contient donc les points E, D, C, F.

Donc en particulier (BC) et (CG) sont orthogonales

Méthode 3 : En prenant le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$, on trouve que

$\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. D'où $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{BG}=0$ et la conclusion.

4. **Vrai :** La droite dont on nous propose une représentation paramétrique est dirigée par un vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(1\,;\,1\,;\,3)$, c'est à dire par un vecteur qui est normal à $\mathscr{P}$, d'après l'équation de celui-ci.

Comme de plus, le point S est sur cette droite dont on nous donne la représentation paramétrique (c'est le point de paramètre -1 sur cette droite), on peut en déduire que la représentation paramétrique donnée est bien celle de la droite décrite.

Autre méthode : Avec $t\in\mathbb{R}$, $\left\{\begin{array}{rcl}x&=&2+t\\y&=&-1+t\\z&=&1+3t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}x&=&1+1+t\\y&=&-2+1+t\\z&=&-2+3+3t\end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{rcl}x&=&1+(1+t)\\y&=&-2+(1+t)\\z&=&-2+3(1+t)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}x&=&1+t'\\y&=&-2+t'\\z&=&-2+3t'\end{array}\right.$ (en posant

$t' = 1 + t$) qui traduit bien la relation $\overrightarrow{SM} = t'\overrightarrow{n}$ soit une équation de la perpendiculaire à $\mathscr{P}$ contenant S.

EXERCICE 4 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. a. On calcule les premiers termes, par exemple en utilisant le mode récurrence de la calculatrice, et on obtient :

$u_1 = 2 + \dfrac{1}{3} \approx 2,33$ $\qquad u_2 = 2 + \dfrac{8}{9} \approx 2,89$

$u_3 = 3 + \dfrac{16}{27} \approx 3,59$ $\qquad u_4 = 4 + \dfrac{32}{81} \approx 4,40$

b. On peut donc émettre la conjecture que la suite est croissante. On pourra en tout cas affirmer qu'elle n'est pas décroissante.

2. a. Nous allons procéder par récurrence :

Identification de la propriété : Pour tout entier naturel n, posons la propriété $\mathscr{P}_n$ suivante : $u_n \leqslant n+3$.

Initialisation : Puisque l'on a $u_0 = 2$ et $0+3 = 3$, on vérifie bien :

$u_0 \leqslant 0+3$: *la propriété $\mathscr{P}_0$ est bien vraie.*

Hérédité : Pour k entier naturel quelconque, on suppose la propriété $\mathscr{P}_k$ vraie.

On a $u_{k+1} = \dfrac{2}{3}u_k + \dfrac{1}{3}k + 1$.

Par hypothèse de récurrence : $u_k \leqslant k+3$

En multipliant par un nombre positif : $\dfrac{2}{3}u_k \leqslant \dfrac{2}{3}(k+3)$

Soit $\dfrac{2}{3}u_k \leqslant \dfrac{2}{3}k + 2$

Puis, en ajoutant un même nombre dans chaque membre :

$\dfrac{2}{3}u_k + \dfrac{1}{3}k + 1 \leqslant \dfrac{2}{3}k + 2 + \dfrac{1}{3}k + 1$

Ce qui donne : $u_{k+1} \leqslant k+3 \leqslant k+4$

On a donc $u_{k+1} \leqslant (k+1)+3$, c'est à dire que la propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

Nous avons donc démontré le caractère héréditaire de la véracité des propriétés $\mathscr{P}_n$.

Conclusion : Puisque la propriété $\mathscr{P}_0$ est vraie et que nous avons prouvé l'hérédité, on peut en déduire, par le principe de récurrence que pour tout entier naturel n, on a $\mathscr{P}_n$ vraie, c'est à dire que pour tout entier naturel n, on a bien $u_n \leqslant n+3$.

b. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3}n + 1 - u_n = -\dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{1}{3}n + \dfrac{3}{3}$

On a donc bien $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3} \times (-u_n + n + 3) = \dfrac{1}{3}(n+3-u_n)$. Comme on l'a montré à la question précédente, pour tout n naturel, on a $u_n \leqslant n+3$ ce qui équivaut à dire que la différence $n+3-u_n$ est positive, et elle le reste en étant multipliée par $\dfrac{1}{3}$, donc la différence entre deux termes consécutifs étant positive, on confirme bien que notre conjecture était correcte : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien croissante, dès le rang 0.

3. **a.** Exprimons, pour un entier n naturel quelconque, v_{n+1} en fonction de v_n :

$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \dfrac{2}{3}u_n - \dfrac{2}{3}n = \dfrac{2}{3}(u_n - n)$

Donc $v_{n+1} = \dfrac{2}{3}v_n$.

La relation de récurrence obtenue confirme que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien géométrique de raison $q = \dfrac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 = 2$.

b. On peut donc en déduire une expression explicite du terme général de la suite v : $v_n = v_0 \times q^n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

Enfin, puisque l'on a, pour tout n, $v_n = u_n - n$, on en déduit :

$u_n = v_n + n$, et donc on aboutit bien à l'expression demandée :

$u_n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + n$.

c. Puisque la raison q est strictement comprise entre -1 et 1, on en déduit que la limite de la suite v est 0, et donc par limite d'une somme de suites, la limite de la suite u est donc $+\infty$, et la suite u est donc divergente.

4. **a.** S_n est la somme de $n+1$ termes de la suite u_n. Mais, comme par ailleurs, on peut considérer que chaque terme u_n est la somme de v_n et de n, donc en réordonnant les termes, S_n est la somme de deux « sous-sommes » : celle des $n+1$ premiers termes de la suite v et celle des $n+1$ premier entiers naturels.

La première sous-somme est une somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique, et vaut donc :

$$v_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = 2\dfrac{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)} = 6 \times \left(1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right).$$

La seconde sous-somme est la somme des $n+1$ premiers entiers naturels, c'est à dire la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1, donc elle vaut :

$\dfrac{0+n}{2} \times (n+1) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (résultat classique).

Finalement, on a $S_n = 6 \times \left(1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \dfrac{n(n+1)}{2}$.

b. On en déduit : $T_n = \dfrac{6 \times \left(1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2}$

$$T_n = \dfrac{6 \times \left(1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \dfrac{\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2}$$

$$T_n = \dfrac{6 \times \left(1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \dfrac{n^2+n}{2n^2} = \dfrac{6 \times \left(1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n}.$$

Puisque, une fois encore, q est entre -1 et 1, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$.
Donc par limite d'une somme de suites, puis d'un produit de suites :
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 6\times\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 6$.
Par ailleurs, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, donc par limite d'un quotient de suites,
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{6\times\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} = 0.$$
De plus $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n} = 0$, et donc finalement, par limite d'une somme de suites, on arrive à conclure que la suite T converge vers $\frac{1}{2}$.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Pour tout entier naturel n,
$v_{n+1} = 0,95\times v_n + 0,01\times c_n$ et
$c_{n+1} = 0,05v_n + 0,99c_n$.

2. Si $A = \begin{pmatrix}0,95 & 0,01\\0,05 & 0,99\end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ alors

$$\begin{array}{cc} \times & \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0,95 & 0,01\\0,05 & 0,99\end{pmatrix} & = \begin{pmatrix}0,95a+0,01b\\0,05a+0,99b\end{pmatrix}\end{array}$$

Les réels c et d tels que $A\times X = Y$ sont :
$c = 0,95a + 0,01b$ et $d = 0,05a + 0,99b$

Les résultats précédents permettent d'écrire que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$ où $X_n = \begin{pmatrix}v_n c_n\end{pmatrix}$. On peut donc en déduire que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

3. a. Calculons $P\times Q$:
$$\begin{array}{cc} \times & \begin{pmatrix}1 & 1\\-5 & 1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1 & -1\\5 & 1\end{pmatrix} & = \begin{pmatrix}6 & 0\\0 & 6\end{pmatrix}\end{array}$$

Calculons $Q\times P$:
$$\begin{array}{cc} \times & \begin{pmatrix}1 & -1\\5 & 1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1 & 1\\-5 & 1\end{pmatrix} & = \begin{pmatrix}6 & 0\\0 & 6\end{pmatrix}\end{array}$$

On constate que les deux produits donnent $(6I_2)$ donc si au lieu de multiplier P par Q on multiplie P par $\frac{1}{6}Q$ on obtient I_2, donc $\frac{1}{6}Q = P^{-1}$.

b. Calculons $P^{-1}AP = \frac{1}{6}QAP$
d'abord , on calcule QA :

$$\begin{array}{cc} \times & \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{array}$$

$a = 0,95 + 0,05 = 1$; $b = 0,01 + 0,99 = 1$; $c = -5 \times 0,95 + 0,05 = -4,7$,
$d = -0,05 + 0,99 = 0,94$

$QA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4,7 & 0,94 \end{pmatrix}$

ensuite on fait $(QA)P$ c'est $\begin{array}{cc} \times & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4,7 & 0,94 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5,64 \end{pmatrix} \end{array}$

Reste à multiplier ce produit par $\frac{1}{6}$; on obtient $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,94 \end{pmatrix}$
qui est bien une matrice diagonale D.

c. Démontrons, par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Pour $n = 1$ il s'agit de démontrer que $A = PDP^{-1}$; or $P^{-1}AP = D$ donc en multipliant à gauche par P, on a :
$P(P^{-1}AP) = PD$, or par associativité cela s'écrit encore $(P(P^{-1})AP = PD$ donc $I_2AP = PD$ donc $AP = PD$, en multipliant à droite par P^{-1},on obtient : $(AP)P^{-1} = PDP^{-1}$, donc
$A = PDP^{-1}$: l'initialisation est prouvée.
Supposons que pour tout entier naturel n, on ait $A^n = PD^nP^{-1}$, alors multiplions à droite par A :
$A^{n+1} = PD^nP^{-1}A$,
mais ce dernier A c'est $A = PDP^{-1}$ donc
$A^{n+1} = PD^nP^{-1}PDP^{-1}$, or $P^{-1}P = I_2$ donc $A^{n+1} = PD^nI_2DP^{-1}$,
$A^{n+1} = PD^nDP^{-1}$ et enfin
$A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$ ce qui prouve l'hérédité.
Conclusion : la relation est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire à partir de ce rang : d'après le principe de récurrence pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. Les résultats des questions précédentes permettant d'établir que

$$v_n = \frac{1}{6}\left(1 + 5 \times 0,94^n\right)v_0 + \frac{1}{6}\left(1 - 0,94^n\right)c_0.$$

et comme la suite géométrique $(0,94^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 vu que $q = 0,94$ donc $-1 < q < 1$

la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\dfrac{1}{6}\,(1+5\times 0)\,v_0 + \dfrac{1}{6}\,(1-0)\,c_0$ donc vers $\dfrac{1}{6}(v_0+c_0) = \dfrac{250\,000}{6}$ et donc par stabilité de la population totale, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\dfrac{5}{6}\,(v_0+c_0) = \dfrac{1\,250\,000}{6}$.