Corrigé Baccalauréat S Métropole 12 septembre 2013

EXERCICE 1 **6 points**

Partie A

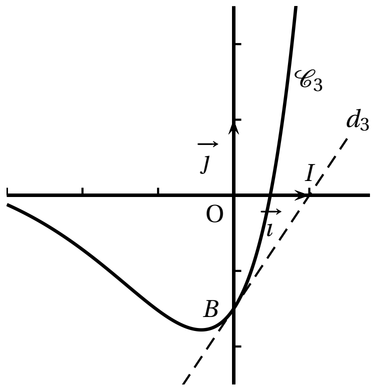
1. Par lecture graphique, le signe de $f(x)$ est donné par :

x	$-\infty$ -2 $+\infty$
$f(x)$	$-$ 0 $+$

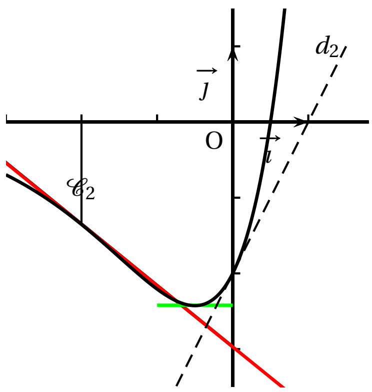
2. **a.** On sait que F est une primitive de f donc, $F' = f$
$F'(0) = f(0) = 2$, $F'(-2) = f(-2) = 0$.

b.

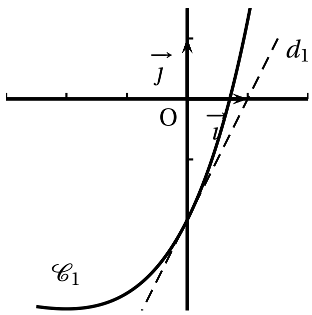
$\mathscr{C}_3$ ne convient pas car la tangente au point d'abscisse 0 n'a pas pour coefficient directeur 2. Elle passe par $B(0\,;\,-1,5)$ (environ) et $I(1\,;\,0)$ donc le coefficient directeur de cette tangente est $\frac{y_I - y_B}{x_I - x_B} = 1,5$, donc $\mathscr{C}_3$ ne convient pas.



$\mathscr{C}_2$ ne convient pas car la tangente au point d'abscisse (-2) n'a pas pour coefficient directeur 0.
$\mathscr{C}_2$ ne convient pas, la tangente horizontale semble plutôt concerner le point d'abscisse $(-0,5)$ de la courbe.



Il reste donc $\mathscr{C}_1$



Partie B :

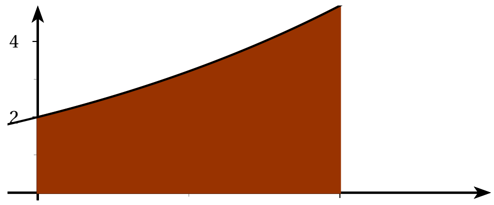
1. **a.** $f'(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + (x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} \times \frac{1}{2}$ donc
$f'(x) = \frac{1}{2}(2+x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$, donc $f'(x) = \frac{1}{2}(x+4)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$.

   b. On sait que la fonction exp ne prend que des valeurs strictement positives, donc $f'(x)$ est du signe de $(x+4)$, et donc le sens des variations de f est donné par le tableau :

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$(-2)\mathrm{e}^{-2}$	$\nearrow$	

   Il y a donc bien un minimum en $x = -4$

2. **a.** si $x > (-2)$, $f(x) > 0$ vu son expression, donc sur $[0~;~1]$ f est positive, continue (car produit de fonctions continues), son intégrale sur $[0~;~1]$ est donc l'aire en unité d'aire de la surface entre la courbe de f, l'axe des x et les verticales d'équations $x = 0$ et $x = 1$ (en unité d'aire).



   b. $2(u(x)v'(x) + u(x)v'(x)) = 2\left(1 \times \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + x \times \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\right) = (2+x)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$
Ainsi on voit bien que f est une dérivée : $f = (2uv)'$; donc $(2uv)$ est une primitive de f.

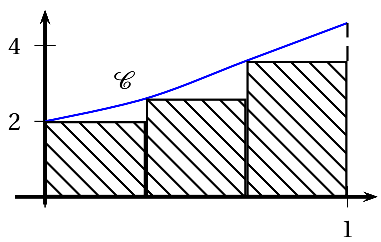
   c. L'intégrale I se calcule à l'aide d'une primitive de f donc $I = [2u(x)v(x)]_0^1 = [2x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}]_0^1 = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\mathrm{e}}$

3. **a.** Faisons un tableau des valeurs successives de k et s pendant le déroulement de l'algorithme pour $n = 3$:

Variables :	k et n sont des nombres entiers naturels.
	s est un nombre réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à s la valeur 0.
Traitement :	Pour k allant de 0 à $n-1$
	| Affecter à s la valeur $s + \dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.
	Fin de boucle.
Sortie :	Afficher s.

k	s
0	0
0	$0 + \frac{1}{3}f\left(\frac{0}{3}\right)$
1	$\frac{1}{3}f\left(\frac{0}{3}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)$
2	$\frac{1}{3}f\left(\frac{0}{3}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}\right)$

   Le traitement est alors fini car k a atteint la valeur $(3-1)$ ce qui a été suivi de la nouvelle valeur de s, l'affichage est alors $\frac{1}{3}f\left(\frac{0}{3}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}\right)$,
or chacun de ces trois termes est l'aire d'un des trois rectangles (largeur obtenue en divisant l'unité par $n = 3$, leurs longueurs successives sont $f\left(\frac{0}{3}\right)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$; $f\left(\frac{2}{3}\right)$.



   b. D'une façon générale l'affichage de l'algorithme obtenu après n boucles (de $k = 0$ à $k = (n-1)$) est la somme de n termes qui sont de la forme $\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$ donc l'affichage est :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

c'est la somme des aires des rectangles « sous la courbe » et au dessus de l'axe des x entre $x = 0$ et $x = 1$, leur largeur vaut $\frac{1}{n}$.

Quand n devient grand, s_n se rapproche de $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. (cours)

EXERCICE 2 **4 points**

1. **RÉPONSE b**.

   La droite $\mathscr{D}$ est définie par la représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 5-2t\\ y &=& 1+3t\\ z &=& 4\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

   $\mathscr{P}$ est le plan d'équation cartésienne $3x+2y+z-6=0$. La droite $\mathscr{D}$ est déterminée par le point $B(5;1;4)$ et son vecteur directeur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$, le plan $\mathscr{P}$ne contient pas B car

   $3x_A+2y_A+z_A-6 = 15+2+4-6 \neq 0$, donc la droite $\mathscr{D}$ n'est pas incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

   Le vecteur normal de $\mathscr{P}$ c'est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$, on a $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{v}$ puisque leur produit scalaire vaut 0 : $(-2)\times 3 + 2\times 3+0 = 0$, donc la droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

2. **RÉPONSE b**.

   $\mathscr{D}'$ la droite qui passe par le point A de coordonnées $(3~;~1~;~1)$ et a pour vecteur directeur
   $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$.

   Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont parallèles, car leur vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires, les deux colonnes de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\(-1)\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$ ne sont pas proportionnelles.

   Donc elles sont soit sécantes, soit ne sont pas coplanaires.

   Un système d'équation paramétrique de $\mathscr{D}'$ est $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3+2u\\ y &=& 1-u\\ z &=& 1+2u\end{array}\right.$, $u \in \mathbb{R}$

   On résout le système en t et u :

   $(S) : \left\{\begin{array}{lcl} 3+2u &=& 5-2t\\ 1-u &=& 1+3t\\ 1+2u &=& 4\end{array}\right.$ $(S) : \left\{\begin{array}{lcl} u &=& 1,5\\ 3+3 &=& 5-2t\\ 1-1,5 &=& 1+3t\end{array}\right.$ $(S) : \left\{\begin{array}{lcl} u &=& 1,5\\ t &=& -0,5\end{array}\right.$

   Les deux droites sont donc sécantes au point $C(6~;~-0,5~;~4)$.

Pour les questions 3 et 4, le plan est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

3. **RÉPONSE a**. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z+\mathrm{i}| = |z-\mathrm{i}|$. Si on considère D d'affixe $(-\mathrm{i})$ et F d'affixe i, alors $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M tels que $DM = FM$ est donc la médiatrice de $[DF]$, c'est l'axe des x.

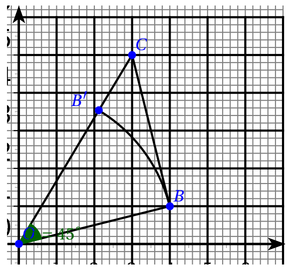
4. **RÉPONSE c**. On désigne par B et C deux points du plan dont les affixes respectives sont notées b et c, on suppose que $\dfrac{c}{b} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

   Donc en considérant les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ et en utilisant module et argument de $\dfrac{z_C - z_O}{z_B - z_O} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, vu que $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ est écrit sous forme exponentielle $\left(\text{module} : \sqrt{2}, \text{argument} : \dfrac{\pi}{4}\right)$

   on en déduit que : $\dfrac{|z_C - z_O|}{|z_B - z_O|} = \sqrt{2}$ et $(\widehat{\overrightarrow{OB}~;\overrightarrow{OC}}) = \dfrac{\pi}{4}$

   Donc $OC = \sqrt{2}\times OB$ et $(\widehat{\overrightarrow{OB}~;~\overrightarrow{OC}}) = \dfrac{\pi}{4}$

   On peut donc tracer le dessin du triangle OBC, il suffit de choisir B (autre que O)



Le triangle OBC semble isocèle et rectangle en B, prouvons le en calculant $|0-b|$ et $|c-b[$ puis arg $\dfrac{z_O - z_B}{z_C - z_B}$, donc on va calculer $\dfrac{z_O - z_B}{z_C - z_B}$ c'est

$\dfrac{z_O - z_B}{z_C - z_B} = \dfrac{-b}{b\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} - b}$; $\quad \frac{z_O - z_B}{z_C - z_B} = \frac{-1}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} - 1}$;

$\dfrac{z_O - z_B}{z_C - z_B} = \dfrac{-1}{(1+\mathrm{i}) - 1}$ car $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et que $\sqrt{2}\sqrt{2} = 2$

$\dfrac{z_O - z_B}{z_C - z_B} = \dfrac{-1}{\mathrm{i}}$

$\dfrac{z_O - z_B}{z_C - z_B} = \mathrm{i}$ car $(-1) = (\mathrm{i})^2$ et

i est de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$, donc $BO = BC$ et $\overrightarrow{BO} \perp \overrightarrow{BC}$.

Solution D. Vergès :

$\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + \mathrm{i}$.

L'énoncé $\dfrac{c}{b} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ peut donc s'écrire : $c = b(1+\mathrm{i})$.

Pour voir si le triangle OBC est rectangle en B considérons le quotient $\dfrac{z_{BO}}{z_{BC}} = \dfrac{0-b}{c-b} = \dfrac{-b}{b + b\mathrm{i} - b} = \dfrac{-b}{b\mathrm{i}} = \dfrac{-1}{\mathrm{i}} = \mathrm{i}$.

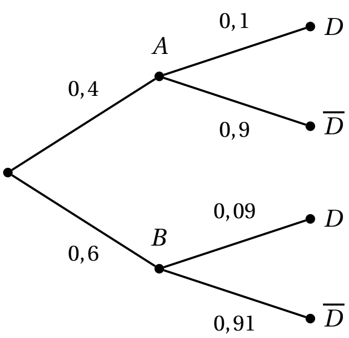
On a donc $\dfrac{z_{BO}}{z_{BC}} = \mathrm{i}$, ce qui montre :

- en prenant les arguments des deux membres que (BO) est perpendiculaire à (BC) ;
- en prenant les modules que $\dfrac{BO}{BC} = 1$ ou encore $BO = BC$.

Le triangle OBC est donc rectangle isocèle en B.

EXERCICE 3 — 5 points

1.



a. Voir à gauche.

b. On demande $p(A \cap D)$, selon l'arbre c'est $0,4 \times 0,1$, donc $p(A \cap D) = 0,04$.

c. On calcule aussi $p(B \cap B)$ de la même façon, c'est $0,6 \times 0,09 = 0,054$.

Enfin comme A et B sont des évènements formant une partition de l'ensemble des pièces,

$P(D) = p(D \cap (A \cup B))$

$p(D) = p((D \cap A) \cup (D \cap B)) = p(D \cap A) + p(D \cap B)$ car les évènements $(D \cap A)$ et $(D \cap B)$ sont disjoints (= incompatibles) ainsi

$p(D) = 0,04 + 0,054 = 0,094$.

d. On nous demande $p_D(A)$, on utilise la formule :

$p_D(A) = \dfrac{p(D \cap A)}{p(D)} = \dfrac{0,04}{0,094} = \dfrac{40}{94} = \dfrac{20}{47}$.

2. a. X_n est le compteur de pièces conformes ; on répète n fois la même expérience qui consiste à extraire une pièce ; elle est conforme : succès de probabilité 0,9, elle est non conforme, probabilité 0,1, chacune des n expériences est une expérience de Bernoulli, elles sont indépendantes entre elles puisque « on assimile ces n tirages à des tirages successifs indépendants et avec remise. »

Donc X_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,9$, notée $\mathscr{B}(n, 0,9)$.

b. Si $n = 150 > 30$, $np = 135 > 5$ et $n(1-p) = 15 > 5$ donc l'intervalle de fluctuation asymptotique I est défini par $I = \left[p - 1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right]$, on calcule avec $p = 0,9$ et $n = 150$ on trouve $1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} \simeq 0,048$, donc $I \simeq [0,852\ ;\ 0,948]$.

c. Ici on a $(150-21)$ pièces conformes donc $F_n = \dfrac{129}{150} = \dfrac{43}{50}$ soit $0,86$.

Au regard de l'intervalle de fluctuation de la question ci-dessus, ce test ne remet pas en cause le réglage de la machine A car $0,86 \in [0,852\ ;\ 0,948]$.

EXERCICE 4 (ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE) 5 points

1. a. $u_1 = \frac{4}{5} = 0,8$; $u_2 = \frac{14}{13} \simeq 1,08$; $u_3 = \frac{40}{41} \simeq 0,98$; $u_4 = \frac{122}{121} \simeq 1,01$.

b. On voit bien que $u_0 > 1$; $u_1 < 1$; $u_2 > 1$; $u_3 < 1$; $u_4 > 1$ donc le signe des différences $(u_n - 1)$ change à chaque rang :

si n pair c'est +

si n impair c'est −, comme $(-1)^n$.

c. $u_{n+1} - 1 = \dfrac{u_n + 2 - (2u_n + 1)}{2u_n + 1} = \dfrac{1 - u_n}{2u_n + 1} = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$.

d. On a admis au début de l'énoncé que tous les u_n sont strictement positifs (on pourrait le démontrer par récurrence) ; démontrons par récurrence la propriété $\mathscr{P}$: $(u_n - 1)$ a le même signe que $(-1)^n$:

L'*initialisation* est faite au b : $(u_0 - 1 > 0)$.

Hérédité : supposons que pour tout entier naturel n $\quad (u_n - 1)$ ait le signe de $(-1)^n$; alors $(1 - u_n)$ a le signe opposé de $(u_n - 1)$ donc a le signe de $(-(-1)^n)$ donc de $(-1)^{n+1}$ et $(2u_n + 1) > 0$, vu que tous les u_n sont strictement positifs, donc la fraction $\dfrac{1 - u_n}{2u_n + 1}$ a le signe de $(-1)^{n+1}$ et comme elle est égale à $(u_{n+1} - 1)$, on a prouvé que $(u_{n+1} - 1)$ a le signe de $(-1)^{n+1}$, l'hérédité est prouvée.

CONCLUSION : On a montré que $u_0 - 1 > 0$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $(u_n - 1)$ a le signe de $(-1)^n$ entraîne que $(u_{n+1} - 1)$ a le signe de $(-1)^{n+1}$, donc d'après le principe de récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_n - 1)$ a le même signe que $(-1)^n$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

Vu que tous les u_n sont strictement positifs, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe.

a. $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \dfrac{\frac{u_n+2}{2u_n+1} - 1}{\frac{u_n+2}{2u_n+1} + 1} = \dfrac{\frac{u_n+2-(2u_n+1)}{2u_n+1}}{\frac{u_n+2+2u_n+1}{2u_n+1}} = \dfrac{u_n + 2 - (2u_n + 1)}{u_n + 2 + 2u_n + 1} = \dfrac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$.

b. $v_{n+1} = \dfrac{-u_n + 1}{3u_n + 3} = \dfrac{-1}{3}\dfrac{(u_n - 1)}{u_n + 1} = \dfrac{-1}{3}v_n$.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\dfrac{-1}{3}$.

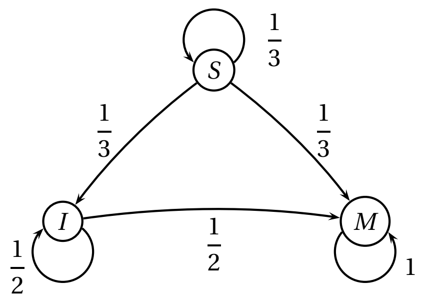
$v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \dfrac{1}{3}$ donc $v_n = \dfrac{1}{3} \cdot \left(\dfrac{-1}{3}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

c. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$.

Donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $u_n = \dfrac{1 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^n}$.

Comme la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{-1}{3}$, donc $-1 < q < 1$, (v_n) tend vers 0, donc (u_n) converge vers 1.

EXERCICE 4 (ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ) **5 points**



On note $P_n = (s_n \quad i_n \quad m_n)$ la matrice ligne .
On a alors $P_0 = (0,99 \quad 0 \quad 0,01)$ et pour tout entier naturel n,

$$\left\{\begin{array}{lcl} s_{n+1} & = & \frac{1}{3}s_n \\ i_{n+1} & = & \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n \\ m_{n+1} & = & \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n + m_n \end{array}\right.$$

1. La matrice A appelée *matrice de transition*, telle que pour tout entier naturel
   — sur la première ligne de A ce sont les probabilités conditionnelles sachant qu'à la semaine donnée, l'individu est dans l'état S, de passer
   • pour $A_{1,1}$ à l'état S, c'est selon le graphique $\frac{1}{3}$, ou par le calcul et le texte, c'est $1 - 2\frac{1}{3}$
   • pour $A_{1,2}$ à l'état I, c'est selon le graphique $\frac{1}{3}$, ou par le texte , c'est $\frac{1}{3}$;
   • pour $A_{1,3}$ à l'état SM, c'est selon le graphique $\frac{1}{3}$, ou par le calcul et le texte, c'est $\frac{1}{3}$.
   — sur la deuxième ligne de A ce sont les probabilités conditionnelles sachant qu'à la semaine donnée, l'individu est dans l'état I, de passer
   • pour $A_{2,1}$ à l'état S, c'est selon le graphique 0.
   • pour $A_{2,2}$ à l'état I, c'est selon le graphique $\frac{1}{2}$, ou par le texte idem ;
   • pour $A_{2,3}$ à l'état SM, c'est selon le graphique $\frac{1}{2}$, ou par le texte idem.
   — sur la troisième ligne de A ce sont les probabilités conditionnelles sachant qu'à la semaine donnée, l'individu est dans l'état M, de passer
   • pour $A_{3,1}$ à l'état S, c'est selon le graphique 0, ou en réfléchissant, s'il est malade il ne peut pas devenir sain ;
   • pour $A_{3,2}$ à l'état I, c'est selon le graphique 0 ;
   • pour $A_{3,3}$ à l'état SM, c'est selon le graphique 1, ou par le texte idem.

   $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; on a bien

   $$\left(s_n \quad i_n \quad m_n\right) \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}s_n \quad \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n \quad \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n + m_n\right) = \left(s_{n+1} \quad i_{n+1} \quad m_{n+1}\right)$$

   $P_{n+1} = P_n \times A$.
2. Par récurrence, prouvons que pour tout entier naturel n non nul, $P_n = P_0 \times A^n$.
   Initialisation Pour $n = 1$ c'est dire que $P_1 = P_0 \times A$ ce qui est vrai (appliquer A à P_0 permet de passer de P_0 à P_1).
   Hérédité : supposons que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $P_n = P_0 \times A^n$, alors multiplions les deux membres à droite par A c'est possible car P_n est de format (1 ; 3) et A de format (3 ; 3) donc les deux membres sont bien de format (1 ; 3), on obtient $P_nA = (P_0A^n) \times A$, donc $P_nA = P_0\,(A^n \times A)$; par associativité du produit de matrices ;
   et enfin $P_nA = P_0A^{n+1}$
   et du côté gauche c'est P_{n+1}, donc $P_{n+1} = P_0A^{n+1}$.

L'hérédité est prouvée.

On a montré que $P_1 = P_0 \times A$ et que pour tout naturel n, $\quad P_n = P_0 \times A^n$ entraîne $P_{n+1} = P_0 A^{n+1}$; donc par le principe de récurrence pour tout entier naturel n non nul, $P_n = P_0 \times A^n$.

3. $P_4 = P_0 A^4$.

Pour calculer correctement A^4 on peut remarquer que $6A$ est à coefficients entiers.

La calculatrice donne :

$$(6A)^4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}^4.$$

$(6A)^4 = \begin{pmatrix} 16 & 130 & 1150 \\ 0 & 81 & 1215 \\ 0 & 0 & 1296 \end{pmatrix}$ donc $A^4 = \begin{pmatrix} \frac{16}{1296} & \frac{130}{1296} & \frac{1150}{1296} \\ 0 & \frac{81}{1296} & \frac{1215}{1296} \\ 0 & 0 & \frac{1296}{1296} \end{pmatrix}$

et en la multipliant à gauche par la matrice $P_0 = \begin{pmatrix} 0,99 & 0 & 0,01 \end{pmatrix}$ on obtient

$$P_4 = \begin{pmatrix} \frac{15,84}{1296} & \frac{128,7}{1296} & \frac{1151,46}{1296} \end{pmatrix}$$

donc :

$P_4 = \begin{pmatrix} 0,012222\ldots & 0,09930555\ldots & 0,88847222\ldots \end{pmatrix}$ donc en arrondissant à 10^{-2} :

$P_4 = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,10 & 0,89 \end{pmatrix}$ (comme donné avant B. 1.).

$S_4 \simeq 0,01$, il y a un pourcentage de chance qu'un individu soit sain au bout de quatre semaines.

Partie B

$$B = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$Q_n = (S_n \quad I_n \quad M_n)$ où S_n, I_n et M_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain et malade la n-ième semaine après la vaccination.

Pour tout entier naturel n, on a alors $Q_{n+1} = Q_n \times B$.

D'après la partie A, $Q_0 = P_4$.

1. On fait $Q_n \times B$ c'est $(S_n \quad I_n \quad M_n) \times \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ c'est Q_{n+1}, donc

$Q_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{12}S_n + \frac{5}{12}I_n + \frac{1}{6}M_n & \frac{1}{4}S_n + \frac{1}{4}I_n + \frac{1}{2}M_n & \frac{1}{3}S_n + \frac{1}{3}I_n + \frac{1}{3}M_n \end{pmatrix}$.

$$\left\{\begin{array}{lcl} S_{n+1} & = & \frac{5}{12}S_n + \frac{5}{12}I_n + \frac{1}{6}S_n \\ I_{n+1} & = & \frac{1}{4}S_n + \frac{1}{4}I_n + \frac{1}{2}S_n \\ M_{n+1} & = & \frac{1}{3}S_n + \frac{1}{3}I_n + \frac{1}{3}M_n \end{array}\right.$$

2. Pour faire des calculs sur des entiers on calcule $(12B)^2$:

$(12B) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ et alors

$$\begin{array}{cc} \times & \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} 48 & 48 & 48 \\ 48 & 48 & 48 \\ 48 & 48 & 48 \end{pmatrix} \end{array}$$

Donc $(12B)^2 = 48J$, $144B^2 = 48J$ donc $B^2 = \frac{1}{3}J$
Comme on peut par calcul prouver que $B^3 = B^2$, on peut par récurrence prouver que pour tout n de $\mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on a $B^n = B^2 = \frac{1}{3}J$

3. **a.** On peut montrer, comme dans la partie A que
[pour tout $n \in \mathbb{N}, Q_{n+1} = Q_n \times B$] $\Longrightarrow$ [pour tout $n \in \mathbb{N}, Q_n = Q_0 \times B^n$]

Si $n \geqslant 2$, $Q_n = Q_0 \times B^n$ et comme $B^n = B^2$,on a $Q_n = Q_0 \times B^2$, donc $Q_n = Q_2$, on calcule Q_2 en faisant $Q_0 \times (\frac{1}{3}J)$ c'est aussi $\left(\frac{1}{3}\right)(Q_0 \times J) = \left(\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix}0,01+0,1+0,89 & 0,01+0,1+0,89 & 0,01+0,1+0,89\end{pmatrix}$,
donc $Q_n = \left(\frac{1}{3}\right)(Q_0J) = \left(\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$,
$Q_n = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

b. Finalement on peut dire qu'avec ce vaccin l'évolution de la maladie va donner des groupes équitablement répartis : autant de chance d'être malade ou sain ou infecté ; le vaccin n'éradique pas la maladie. (cependant sans vaccin, on pourrait montrer que la répartition limite serait : tous malades ...)