∽ Baccalauréat S Pondichéry 16 avril 2013 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie 1

$$h(t) = \frac{a}{1 + b\mathrm{e}^{-0,04t}}$$

On sait qu'initialement, pour $t = 0$, le plant mesure $0,1$ m et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m.

— Par propriété de la fonction exponentielle, $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} 1 + b\mathrm{e}^{-0,04t} = 1$ donc par quotient $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} h(t) = a$, d'après l'énoncé on a donc $a = 2$.

— $h(0) = 0,1 \Rightarrow \dfrac{a}{1+b} = 0,1 \Rightarrow b = \dfrac{2}{0,1} - 1 = 19$

Partie 2

$$f(t) = \frac{2}{1 + 19\mathrm{e}^{-0,04t}}$$

1. f est de la forme $\dfrac{2}{u}$ avec $u(t) = 1 + 19\mathrm{e}^{-0,04t}$ donc $f' = -\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u'(t) = -0,76\,\mathrm{e}^{-0,04t}$, soit (confusion à ne pas faire entre fonction u, u' et valeurs en t ...)

$$f'(t) = \frac{2 \times 0,76\,\mathrm{e}^{-0,04t}}{\left(1 + 19\mathrm{e}^{-0,04t}\right)^2}.$$

Pour tout $t \in [0~;~250]$, $f'(t) > 0$ donc f strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,250]$.

2. Le plant de maïs atteint une hauteur supérieure à $1,5$ m se traduit par $h(t) > 1,5$

$$\begin{array}{rrcl}
 & \dfrac{2}{1+19\mathrm{e}^{-0,04t}} & > & 1,5 \\
\iff & \dfrac{2}{1,5} - 1 & > & 19\mathrm{e}^{-0,04t} \\
\iff & \dfrac{1}{57} & > & \mathrm{e}^{-0,04t} \\
\iff & \ln\left(\dfrac{1}{57}\right) & > & -0,04t \\
\iff & -\ln 57 & > & -0,04t \\
\iff & \dfrac{\ln 57}{0,04} & < & t
\end{array}$$

Or $\dfrac{\ln 57}{0,04} \approx 101,08$.

Il faut donc un peu plus de 101 jours pour que le plant dépasse $1,5$ m.

3. (a) Pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,250]$ on a

$$\frac{2\mathrm{e}^{0,04t}}{\mathrm{e}^{0,04t}+19}=\frac{2\mathrm{e}^{0,04t}}{\mathrm{e}^{0,04t}(1+\dfrac{19}{\mathrm{e}^{0,04t}})}=\frac{2\cancel{\mathrm{e}^{0,04t}}}{\cancel{\mathrm{e}^{0,04t}}(1+19\mathrm{e}^{-0,04t})}=f(t)$$

$F(t)=50\ln\left(\mathrm{e}^{0,04t}+19\right)$ est de la forme $50\ln u(t)$ avec $u(t)=\mathrm{e}^{0,04t}+19$ et $u(t)>0$ sur $\mathbb{R}$.
donc $F'=50\dfrac{u'}{u}$ avec $u'(t)=0,04\mathrm{e}^{0,04t}$, soit

$$F'(t)=50\times\frac{0,04\mathrm{e}^{0,04t}}{\mathrm{e}^{0,04t}+19}=\frac{2\mathrm{e}^{0,04t}}{\mathrm{e}^{0,04t}+19}=f(t).$$

F est donc bien une primitive de f sur l'intervalle $[0\,;\,250]$.

(b) Par définition la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[50\,;\,100]$ est $\mu=\dfrac{1}{100-50}\displaystyle\int_{50}^{100}f(t)\,\mathrm{d}t$.

$$\mu=\frac{1}{50}\,[F(t)]_{50}^{100}=\ln(\mathrm{e}^4+19)-\ln(\mathrm{e}^2+19)\simeq 1,03.$$

La hauteur moyenne du plant entre le 50e et le 100e jour est de 1,03 m.

4. D'après le graphique, la vitesse est maximale lorsque la pente (coefficient directeur) de la tangente à la courbe est maximale, soit à $t=80$, la hauteur du plant est environ de 1,15 m.

EXERCICE 2 **4 points**
Commun à tous les candidats

Les bonnes réponses sont **b. c. a. b.**

L'espace est rapporté à un repère orthonormal. t et t' désignent des paramètres réels.

Le plan (P) a pour équation $x-2y+3z+5=0$ et donc, par propriété, il a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$.

Le plan (S) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl}x&=&-2+t+2t'\\y&=&0-t-2t'\\z&=&-1-t+3t'\end{array}\right.$

Par propriété, le plan (S) passe par F$(-2\,;\,0\,;\,-1)$ et a pour vecteurs de base $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$

La droite (D) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl}x&=&-2+t\\y&=&-t\\z&=&-1-t\end{array}\right.$

Par propriété, la droite (D) passe par F$(-2\,;\,0\,;\,-1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, elle est donc clairement contenue dans le plan (S) pour la valeur $t'=0$.

On donne les points de l'espace M$(-1\,;\,2\,;\,3)$ et N$(1\,;\,-2\,;\,9)$.

1. La bonne réponse est **b.** en excluant les trois autres ou en vérifiant directement.

   a. N'est pas un plan mais une droite.

   c. $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & t+t' \\ y & = & 1-t-2t' \\ z & = & 1-t-3t' \end{array}\right.$ passe par $(0\,;\,1\,;\,1) \notin$ (P).

   d. $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 1+2t+t' \\ y & = & 1-2t+2t' \\ z & = & -1-t' \end{array}\right.$ passe par $(1\,;\,1\,;\,-1) \notin$(P)

   b. $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & t+2t' \\ y & = & 1-t+t' \\ z & = & -1-t \end{array}\right.$ passe par le point A$(0\,;\,1\,;\,-1)$ qui est élément de (P) car $0-2+3\times(-1)+5=0$

   et a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Or $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = 0$ et $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ donc $\overrightarrow{n}$ normal à deux vecteurs non colinéaires du plan est normal au plan. On a bien une représentation paramétrique du plan (P).

2. La bonne réponse est **c.** « La droite (D) est une droite du plan (P). »

   Remplaçons, pour t quelconque, les coordonnées d'un point de la droite dans l'équation du plan (P). Quel que soit $t \in \mathbb{R}$, $-2-t-2\times(-t)+3\times(-1-t)+5 = -2-3+5+t+2t-3t=0$, donc tout point de Δ appartient à (P), la droite est contenue dans (P).

3. La bonne réponse est **a.** « La droite (MN) et la droite (D) sont orthogonales. »

   $\overrightarrow{\text{MN}}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

   donc $\overrightarrow{\text{MN}} \cdot \overrightarrow{u} = 1+2-3=0$ prouve que (MN) est orthogonale à (D).

4. La bonne réponse est **b.** « La droite (Δ) et la droite d'intersection de (P) et (S). »

   On vérifie que la droite Δ est contenue dans chacun des deux plans (qui ne sont pas confondus par ailleurs).

   . Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t-2\times(-2-t)+3\times(-3-t)+5 = t+4+2t-9-3t+5=0$ prouve $(\Delta) \subset$ (P).

   . Soit E le point de Δ de paramètre $t=0$: E$(0\,;\,-2\,;\,-3)$ et soit F le point de paramètre $t=-2$: F$(-2\,;\,0\,;\,-1)$. On reconnaît le point de (S) de paramètre $(t=0,\ t'=0)$ donc F $\in$ (S).
   Montrons que E $\in$ (S).
   Résolvons le système $\left\{\begin{array}{l c r} 0 & = & -2+t+2t' \\ -2 & = & -t-2t' \\ -3 & = & -1-t+3t' \end{array}\right.$

   En additionnant les lignes (1) et (3) on obtient $5t'=0$ donc $t'=0$ et en remplaçant dans les trois équations on obtient bien une seule valeur de $t=2$.
   Cela prouve que E $\in$ (P) pour $(t=2,\ t'=0)$.
   Conclusion : les points E et F sont dans (S), donc la droite (Δ) est entièrement contenue dans (S).

   La droite (Δ) étant simultanément contenue dans les deux plans (non confondus) est la droite d'intersection.

(*Remarque* : Les réponses **a.** et **c.** pouvaient être éliminées de manière directe, mais la réponse **b.** exclut aussi la réponse **d.**).

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend $z_M = 2\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

   (a) $z_M = 2 \times \left(\frac{1}{2} - \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \text{i}\sqrt{3}$.

   (b) $z_{M'} = -\text{i}z_M = -\text{i}(1-\text{i}\sqrt{3}) = -\text{i} + \text{i}^2\sqrt{3} = -\sqrt{3} - \text{i}$.

   Module et argument méthode algébrique :

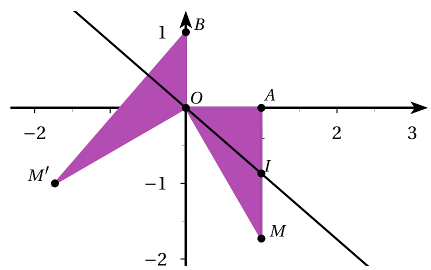
   $|z_{M'}| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ et si l'on nomme θ un argument de $z_{M'}$ alors, par propriété, $\begin{cases} \cos\theta &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta &= -\frac{1}{2} \end{cases}$ On reconnaît $\theta = -\frac{5\pi}{6}$ (modulo 2π).

   Module et argument par la forme exponentielle :

   $|z_{M'}| = |-\text{i}| \times |z_M| = 1 \times |2\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}| = 2$

   $\arg(z_{M'}) = \arg(-\text{i}) + \arg(z_M) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6}$ (module 2π).

   (c) La figure n'est pas à l'échelle.
   Graphiquement on vérifie les propriétés 1 et 2.



2. Cas général en prenant $z_M = x + \text{i}y$ avec $y \neq 0$.

   (a) $z_I = \frac{z_A + z_M}{2} = \frac{x+1}{2} + \text{i}\,\frac{y}{2}$.

   (b) $z_{M'} = -\text{i}(x + \text{i}y) = y - \text{i}\,x$.

   (c) $I\left(\frac{x+1}{2}\,;\,\frac{y}{2}\right)$, $\text{B}(0\,;\,1)$ et $M'(y\,;\,-x)$.

   (d) $\overrightarrow{\text{O}I} \cdot \overrightarrow{\text{B}M'} = \left(\frac{x+1}{2}\right) \times y + \left(\frac{y}{2}\right) \times (-x-1) = \frac{xy}{2} + \frac{1}{2} - \frac{xy}{2} - \frac{1}{2} = 0$ donc les droites $(\text{O}I)$ et $(\text{B}M')$ sont perpendiculaires.

   (e) $\text{B}M' = \sqrt{y^2 + (-x-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ et d'autre part, $2\text{O}I = 2\sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2} = \frac{2}{2}\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ donc

$$2\text{O}I = \text{B}M'.$$

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. (a) On a $A \times U_n = \begin{pmatrix} 0,125 j_n + 0,525 a_n \\ 0,625 j_n + 0,625 a_n \end{pmatrix} = U_{n+1}$.

   (b) un an d'observation puis après deux ans d'observation (résultats arrondis à l'unité près par défaut). $U_1 = A \times U_0 = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 + 262,5 \\ 125 + 312,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 287,5 \\ 437,5 \end{pmatrix}$.

   Au bout de 1 an il y aura 287 jeunes et 437 adultes.

   $U_2 = A \times U_1 = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 287,5 \\ 437,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35,9375 + 229,688 \\ 179,688 + 273,438 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 265,625 \\ 453,125 \end{pmatrix}$.

   Au bout de 2 ans il y aura 265 jeunes et 453 adultes.

   (c) fonction de A^n et de U_0. Une récurrence simple permet de montrer que quel que soit le naturel n, $U_n = A^n \times U_0$.

2. (a) $Q \times D = \begin{pmatrix} -1.75 & 3 \\ 1,25 & 5 \end{pmatrix}$, puis

   $(Q \times D) \times Q^{-1} = \begin{pmatrix} -0,175 + 0,3 & 0,105 + 0,42 \\ 0,125 + 0,5 & -0,075 + 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix} = A$.

   (b) $A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$?

   Initialisation : On a bien $A^1 = Q \times D^1 \times Q^{-1}$ (question précédente).

   Hérédité : Supposons que pour tout entier $p > 1$, $A^p = Q \times D^p \times Q^{-1}$.

   Alors $A^{p+1} = A^p \times A = \left(Q \times D^p \times Q^{-1}\right) \times \left(Q \times D \times Q^{-1}\right) = Q \times D^p \times \left(Q^{-1} \times Q\right) \times D \times Q^{-1} =$
   $Q \times D^p \times I \times D \times Q^{-1} = Q \times (D^p \times D) \times Q^{-1} = Q \times D^{p+1} \times Q^{-1}$.

   La formule est donc vraie au rang $p+1$.

   $A^1 = Q \times D^1 \times Q^{-1}$ et pour tout entier $p > 1$, $A^p = Q \times D^p \times Q^{-1}$ entraîne $A^{p+1} = Q \times D^{p+1} \times Q^{-1}$ donc par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n non nul :

   $A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$.

   (c) La matrice D est diagonale, donc :

   $D^n = \begin{pmatrix} -0,25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-0,25)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. (a) Quel que soit le naturel n :

   $U_n = A^n \times U_0 = \left(0,3 + 0,7 \times (-0,25)^n \quad 0,42 - 0,42 \times (-0,25)^n \quad 0,5 - 0,5 \times (-0,25)^n \quad 0,7 \ + 0,3 \ \times (-0,25)^n\right) \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix} =$

   $\begin{pmatrix} 60 + 140 \times (-0,25)^n + 210 - 210 \times (-0,25)^n \\ 100 + -100 \times (-0,25)^n + 350 + 150 \times (-0,25)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 270 - 70 \times (-0,25)^n \\ 450 + 50 \times (-0,25)^n \end{pmatrix}$.

   Conclusion $\left\{ \begin{array}{lcl} j_n & = & 270 - 70 \times (-0,25)^n \\ a_n & = & 450 + 50 \times (-0,25)^n \end{array} \right.$

   (b) Comme $-1 < -0,25 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} (-0,25)^n = 0$, donc :

   $\lim\limits_{n \to +\infty} j_n = 270$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 450$.

   Le nombre d'animaux jeunes va tendre vers 270 et celui des adultes vers 450 au bout de quelques années.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

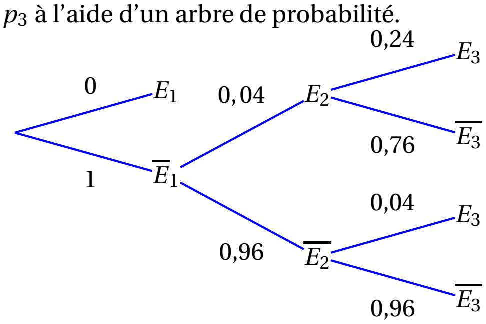
Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,04$.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.

On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

1. (a) Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.

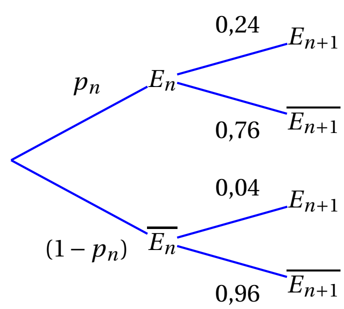


Théorème des probabilités totales : $E_3 = E_2 \cap E_3 \cup \overline{E_2} \cap E_3$ (union d'évènements disjoints)
$p_3 = P(E_3) = 0,04 \times 0,24 + 0,96 \times 0,04 = 0,048$.

(b) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

$$\mathrm{P}_{E_3}(E_2) = \frac{\mathrm{P}(E_2 \cap E_3)}{\mathrm{P}(E_3)} = \frac{0,04 \times 0,24}{0,048} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

2. (a) Complétons l'arbre



(b) En appliquant le théorème des probabilités totales :

$$E_{n+1} = E_n \cap E_{n+1} \cup \overline{E_n} \cap E_{n+1} \text{(union d'évènements disjoints)}$$
$$p_{n+1} = 0,24 p_n + 0,04(1 - p_n) = (0,24 - 0,04) p_n + 0,04 = 0,2 p_n + 0,04$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,05 = 0,2p_n + 0,04 - 0,05 = 0,2p_n - 0,01 = 0,2(p_n - 0,05) = 0,2u_n$$

donc (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_1 = -0,05$ et la raison $r = 0,2$.

Par propriété, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = u_1 \times r^{n-1} = -0,05 \times 0,2^{n-1}$
et donc : $p_n = u_n + 0,05 = 0,05(1 - 0,2^{n-1})$.

(d) Limite de la suite $\left(p_n\right)$.
Comme $|0,2| < 1$ alors par théorème : $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,2)^{n-1} = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0,05$.

(e) Le nombre J qui est affiché en sortie d'algorithme est le rang du premier terme de la suite (p_n) qui s'approche de la limite 0,05 à 10^{-K} près, où K est un entier fixé au départ.
La convergence de l'algorithme est assurée par l'existence de la limite vue en (d).

3. (a) • Une semaine donnée, on peut définir une épreuve de Bernoulli, où le succès est l'évènement E « un salarié est absent pour maladie. »
• L'état de chaque salarié étant supposé indépendant de l'état des autres, on obtient donc un Schéma de Bernoulli sur les 220 salariés de l'entreprise.
• La variable aléatoire X qui donne le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli suit, par propriété, la loi binomiale $\mathcal{B}(220\ ;\ 0,05)$.
Par propriété,

$$\mu = \mathrm{E}(X) = np = 220 \times 0,05 = 11 \qquad \text{et} \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{220 \times 0,05 \times 0,95} \simeq 3,23.$$

(b) On a bien :
$n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$, donc la loi de X peut être approchée par la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.
Donc la loi de $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ peut être approchée par une loi normale $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.
La probabilité de l'évènement : « le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15 » se note
$\mathrm{P}(7 \leqslant X \leqslant 15)$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{7-11}{3,23} \simeq -1,238 \\[2ex] \dfrac{15-11}{3,23} \simeq 1,238 \end{array}\right\} \quad \text{donc} \quad \mathrm{P}(7 \leqslant X \leqslant 15) \approx \mathrm{P}(-1,24 < Z < 1,24)$$

Au moyen de la table fournie :

$$\mathrm{P}(-1,24 < Z < 1,24) = \mathrm{P}(Z < 1,24) - \mathrm{P}(Z < -1,24) = 0,892 - 0,108 = 0,784.$$

À 10^{-2} près, on a donc $\mathrm{P}(7 \leqslant X \leqslant 15) \simeq 0,78$.

Annexe (Exercice 1)