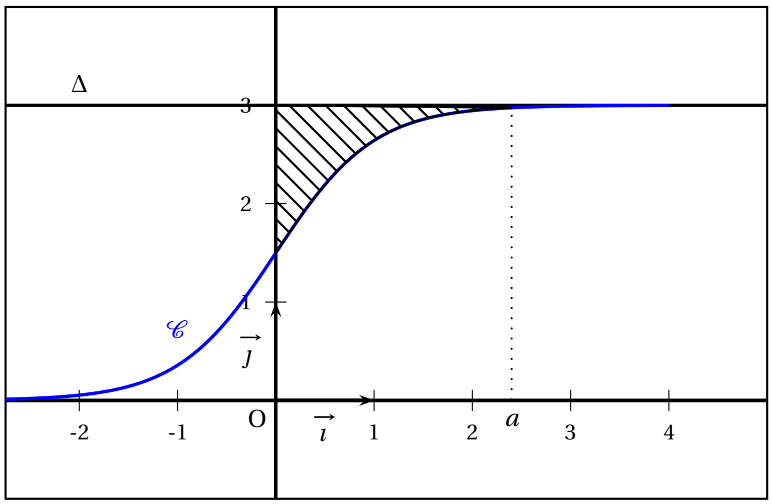
Corrigé du baccalauréat S Pondichéry
17 avril 2015

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Partie A



1. On sait que $\text{e}^{-2x} > 0$ quel que soit le réel x, donc $1 + \text{e}^{-2x} > 1 > 0$. Le dénominateur étant non nul, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle la fonction étant de la forme $\dfrac{3}{u(x)}$, avec $u(x) = 1 + \text{e}^{-2x}$, donc $u'(x) = -2\text{e}^{-2x}$ on a :

$f'(x) = -\dfrac{3u'(x)}{(u(x))^2} = -\dfrac{3 \times (-2)\text{e}^{-2x}}{\left(1+\text{e}^{-2x}\right)^2} = \dfrac{6\text{e}^{-2x}}{\left(1+\text{e}^{-2x}\right)^2} > 0$ car quotient de deux nombres supérieurs à zéro. la fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (comme le laisse supposer le graphique).

2. On a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} -2x = -\infty$ et en posant $X = -2x$, $\displaystyle\lim_{X \to -\infty} \text{e}^X = 0$, d'où $\displaystyle\lim_{X \to -\infty} 1 + \text{e}^X = 1$ et enfin par quotient de limites $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$: ceci montre que la droite (Δ) d'équation $y = 3$ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.

3. Sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, la fonction f est continue car dérivable, strictement croissante de $f(0) = \dfrac{3}{1+1} = 1,5$ à 3 : il existe donc un réel unique $\alpha \in [0 ; +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 2,999$.

La calculatrice donne :

$f(4) \approx 2,99899$ et $f(5) \approx 2,9999$, donc $4 < \alpha < 5$;

$f(4,0) \approx 2,99899$ et $f(4,1) \approx 2,9992$, donc $4,0 < \alpha < 4,1$;

$f(4,00) \approx 2,99899$ et $f(4,01) \approx 2,99901$, donc $4,00 < \alpha < 4,01$ (encadrement à 10^{-2} près).

Partie B

1. On a vu dans la partie A que $0 < f(x) < 3 \iff -f(x) < 0 < 3 - f(x)$, soit $h(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$H'(x) = -\dfrac{3}{2} \times \dfrac{-2\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \dfrac{3\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \dfrac{3\mathrm{e}^{-2x}+3-3}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \dfrac{3\mathrm{e}^{-2x}+3}{1+\mathrm{e}^{-2x}} - \dfrac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \dfrac{3\left(\mathrm{e}^{-2x}+1\right)}{1+\mathrm{e}^{-2x}} - \dfrac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = 3 - f(x) = h(x)$.
Donc H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

3. **a.** On a vu que sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur l'intervalle $[0\ ;\ a]$ (avec $a >$), la fonction h est positive, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x$ est égale en unités d'aire à la mesure de la surface limitée par la représentation graphique de h, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$.

Mais comme $h(x) = 3 - f(x)$, cette surface est la surface limitée par la droite Δ, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$ (voir l'aire hachurée ci-dessus.

b. D'après la question **B. 2.**, on a :
$\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = [H(x)]_0^a = H(a) - H(0) = -\dfrac{3}{2}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2\times a}\right) + \dfrac{3}{2}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2\times 0}\right) = \dfrac{3}{2}\ln 2 - \dfrac{3}{2}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2\times a}\right) = \dfrac{3}{2}\ln\left(\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}}\right)$.

c. D'après la question précédente, on sait que l'aire de $\mathscr{D}_a$, surface limitée par la droite Δ, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$ est égale à $\dfrac{3}{2}\ln\left(\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}}\right)$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+\mathrm{e}^{-2x} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\right) = 2$, donc finalement par composition, l'aire de $\mathscr{D}$ est égale à $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3}{2}\ln\left(\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\right) = \dfrac{3}{2}\ln 2 \approx 1,04$ (u. a.)

EXERCICE 2 — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. On a pour tout naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{b}{1-a} = au_n + b - \dfrac{b}{1-a} = au_n + \dfrac{b(1-a)-b}{1-a} = au_n - a\dfrac{b}{1-a} = a\left[u_n - \dfrac{b}{1-a}\right] = av_n$.
L'égalité $v_{n+1} = av_n$, vraie pour tout naturel n montre que la suite (v_n) est géométrique de raison a.

2. On sait que $v_n = v_0 \times a^n$; donc si $a \in]-1\ ;\ 1[$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$, donc
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} u_n - \dfrac{b}{1-a} = 0$ soit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{b}{1-a}$.

Partie B

1. Après la taille la plante mesure $80 \times \left(1 - \dfrac{1}{4}\right) = 80 \times \dfrac{3}{4} = 60$ (cm). Au bout de 1 an elle a poussé de 30 cm ; elle mesurera donc en mars 2016 avant la taille $60 + 30 = 90$ cm.

2. **a.** D'une année sur l'autre, tailler le quart revient à multiplier par $\dfrac{3}{4} = 0,75$ et la pousse annuelle est de 30 cm, donc :
$h_{n+1} = 0,75h_n + 30$.

b. Mars 2015 correspondant à $n = 0$, on a : $h_0 = 80$; $h_1 = 90$,
$h_2 = 0,75 \times 90 + 30 = 67,5 + 30 = 97,5$: la suite semble être croissante.
Initialisation : on sait déjà que $h_0 < h_1$;
Hérédité : supposons que quel que soit $p \in \mathbb{N}$, $h_p < h_{p+1}$, alors
$0,75h_p < 0,75h_{p+1} \iff 0,75h_p + 30 < 0,75h_{p+1} + 30 \iff h_{p+1} < h_{p+2}$
l'hérédité est démontrée.
Conclusion : $h_0 < h_1$ et quel que soit $p \in \mathbb{N}$, $h_p < h_{p+1}$ entraîne
$h_{p+1} < h_{p+2}$, donc par le principe de récurrence on a démontré que pour tout naturel n, $h_n < h_{n+1}$: la suite (h_n) est croissante.

c. Si la suite (h_n) converge vers ℓ, par continuité l'égalité :
$h_{p+1} = 0,75h_p + 30$ donne en passant aux limites à l'infini :
$\ell = 0,75\ell + 30 \iff 0,25\ell = 30 \iff \ell = 120$.
La plante aura donc une taille inférieure à 120 cm. (À la calculatrice
$h_{20} \approx 119,873$ cm).
On utilise le résultat de la partie A avec la suite (h_n) et les coefficients $a = 0,75$ et b = 30.
Comme $-1 < 0,75 < 1$, la suite (h_n) converge vers $\dfrac{b}{1-a} = \dfrac{30}{1-0,75} = \dfrac{30}{0,25} =$ 120.

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A Étude de la durée de vie d'un appareil électroménager

1. **a.** Par symétrie $P(104 \leqslant X) = 0,16$ et donc $P(64 \leqslant X \leqslant 104) = 1 - 2 \times 0,16 = 1 - 0,32 = 0,68$.
   b. On vient donc de trouver que $P(\mu - 20 \leqslant X \leqslant \mu + 20) = 0,68$: donc $\sigma \approx 20$.
2. **a.** La variable Z est centrée et réduite : elle suit donc une loi normale centrée réduite.
   b. On part de $P(X \leqslant 64) = 0,16$, d'où $P(X \leqslant 64) = P(X - 84 \leqslant -20) = P\left(\dfrac{X-84}{\sigma} \leqslant \dfrac{-20}{\sigma}\right) = P\left(Z \leqslant -\dfrac{20}{\sigma}\right)$.
   Finalement $P\left(Z \leqslant -\dfrac{20}{\sigma}\right) = 0,16$
   c. Le résultat précédent entraîne que $-\dfrac{20}{\sigma} \approx -0,9945 \iff \sigma \approx \dfrac{20}{0,9945}$ soit $\sigma \approx 20,111$ à 10^{-3} près.
3. Dans cette question, on considère que $\sigma = 20,1$.
   a. Il faut trouver :
   $P(24 \leqslant X \leqslant 60) \approx 0,115$ (calculatrice)
   b. On a $P(X > 120) = 0,5 - P(84 \leqslant X \leqslant 120) \approx 0,037$.

Partie B Étude de l'extension de garantie d'El'Ectro

1. **a.** Si G est la variable aléatoire donnant le nombre de clients ayant pris l'extension de garantie, puisque les tirages sont indépendants et de même probabilité 0,115, G suit une loi binomiale $\mathscr{B}(12,\ 0,115)$.
   La probabilité qu'exactement 3 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie est égale à :
   $P(G = 3) = \binom{12}{3} \times 0,115^3 \times (1 - 0,115)^9 \approx 0,1114$ soit 0,111 au millième près.

b. On a $P(G \geqslant 6) = 1 - P(G \leqslant 5) \approx 0{,}001$ au millième près.

2. • Si le client utilise l'extension le gain algébrique est $65 - 399 = -334$;
• Si le client n'utilise pas l'extension le gain algébrique est 65

a. • Si le client utilise l'extension le gain algébrique est $65 - 399 = -334$;
• Si le client n'utilise pas l'extension le gain algébrique est 65.
La variable aléatoire Y prend donc deux valeurs 65 et -334 avec les probabilités respectives 0,885 et 0,115.

b. On a $\mathrm{E}(Y) = 65 \times 0,885 + (-334) \times 0,115 = 19,115 \approx 19,12$ €au centime près. L'offre est donc avantageuse pour l'entreprise puisque celle gagne presque 20 € par client.

EXERCICE 4 **5 points**
Candidat n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit un cube ABCDEFGH d'arête 1.
Dans le repère $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$, on considère les points M, N et P de coordonnées respectives $\mathrm{M}\left(1\,;\,1\,;\,\dfrac{3}{4}\right)$, $\mathrm{N}\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,1\right)$, $\mathrm{P}\left(1\,;\,0\,;\,-\dfrac{5}{4}\right)$.

1. Voir la figure à la fin.

2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$. $\overrightarrow{\mathrm{MN}}\left(-1\,;\,-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{4}\right)$ et $\overrightarrow{\mathrm{MP}}\,(0\,;\,-1\,;\,-2)$.
Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$ ne sont pas colinéaires, les droites (MN) et (MP) ne sont pas parallèles donc les points M, N et P ne sont pas alignés.

3. a. $-1 \times 0 + \left(-\dfrac{1}{2}\right) \times (-1) + \left(\dfrac{1}{4}\right) \times (-2) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 0$

b. L'algorithme 1 calcule le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{MN}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MP}} = 0$, donc les vecteurs sont orthogonaux donc les droites (MN) et (MP) sont perpendiculaires : le triangle MNP est donc rectangle en M.

4.

5. a. Si n est un vecteur normal au plan (MNP) une équation de celui-ci est :
$5x - 8y + 4z = d$, avec $d \in \mathbb{R}$;
$\mathrm{N} \in (\mathrm{MNP}) \iff -8 \times \dfrac{1}{2} + 4 \times 1 = d = \iff 0 = d$
Une équation cartésienne du plan (MNP) est donc $5x - 8y + 4z = 0$.

b. On traduit la relation vectorielle : $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \Delta \iff \overrightarrow{\mathrm{F}M} = t\overrightarrow{n}$, $t \in \mathbb{R}$ soit

$$\left\{\begin{array}{lcl} x-1 &=& 5t\\ y-0 &=& -8t\\ z-1 &=& 4t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+5t\\ y &=& -8t\\ z &=& 1+4t\end{array}\right.$$

6. a. Les coordonnées de K vérifient l'équation du plan et l'équation paramétrique de Δ, soit :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 5x-8y+4z &=& 0\\ x &=& 1+5t\\ y &=& -8t\\ z &=& 1+4t\end{array}\right. \Rightarrow 5(1+5t) - 8 \times (-8t) + 4(1+4t) = 0 \iff$$

$105t + 9 = 0 \iff t = -\dfrac{9}{105} \iff t = -\dfrac{3}{35}$.
D'où $x = 1 + 5 \times \left(-\dfrac{3}{35}\right) = 1 - \dfrac{3}{7} = \dfrac{4}{7}$;

$y = -8 \times \left(-\dfrac{3}{35}\right) = \dfrac{24}{35}$;

$z = 1 + 4 \times \left(-\dfrac{3}{35}\right) = 1 - \dfrac{12}{35} = \dfrac{23}{35}$.

Donc $\text{F}\left(\dfrac{4}{7}\ ;\ \dfrac{24}{35}\ ;\ \dfrac{23}{35}\right)$.

b. Puisque (FK) est orthogonale au plan MNP, [FK] est hauteur du tétraèdre MNPF, donc

$V_{\text{MNPF}} = \dfrac{1}{3} \times \mathscr{A}(\text{MNP} \times \text{FK})$.

Or MNP est rectangle en M, donc $\mathscr{A}(\text{MNP} = \dfrac{\text{MN} \times \text{MP}}{2}$.

$\text{MN}^2 = 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{21}{16} \Rightarrow \text{MN} = \dfrac{\sqrt{21}}{4}$;

$\text{MP}^2 = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \text{MP} = \sqrt{5}$;

Donc $V = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sqrt{21}}{4} \times \dfrac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{\dfrac{27}{35}} = \dfrac{1}{24} \times \sqrt{\dfrac{21 \times 27}{35}} \times \sqrt{5} =$

$\dfrac{1}{24} \times \sqrt{\dfrac{81}{5}} \times \sqrt{5} = \dfrac{9}{24} = \dfrac{3}{8}$.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidat ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Voir le cours.

2. On considère le nombre de Mersenne $2^{33}-1$.

a. Si 3 divise $2^{33}-1$ et 4 divise $2^{33}-1$, comme 3 et 4 sont premiers entre eux, d'après le **1.** 12 devrait diviser $2^{33}-1$ ce qui est contradictoire avec ce que dit l'élève : il a donc tort.

b. 2^{33} est un naturel pair donc $2^{33}-1$ est impair donc 4 ne peut le diviser.

c. $2 \equiv -1 \quad [3] \Rightarrow 2^3 \equiv (-1)^3 \quad [3] \iff 2^3 \equiv -1 \quad [3] \Rightarrow \left(2^3\right)^{11} \equiv (-1)^{11} \quad [3] \iff 2^{33} \equiv -1 \quad [3]$ ce qui montre que 3 ne divise pas $2^{33}-1$.

d. $S = 1+2^3+\left(2^3\right)^2+\left(2^3\right)^3+\cdots+\left(2^3\right)^{10}$;

$2^3S = 2^3+2^4+\left(2^3\right)^3+\left(2^3\right)^3+\cdots+\left(2^3\right)^{11}$, d'où par différence :

$7S = \left(2^3\right)^{11}-1 \iff S = \dfrac{\left(2^3\right)^{11}-1}{7}$.

e. S est une somme d'entiers naturel donc est un entier naturel ; le résultat précédent montre que $\left(2^3\right)^{11}-1$ est donc un multiple de 7.

Finalement $2^{33}-1$ est divisible par 7.

3. $2^7-1 = 128-1 = 127$.

Ce nombre n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7 (dans la division reste 1), ni par 11 (dans la division reste 7), ni par 13 (dans la division reste 10) et comme $13^2 = 169$, il est inutile de continuer : 127 est premier.

4. a. Comme on vient de le voir pour 127, l'algorithme cherche le reste de la division de $2^{33}-1$ par les naturels 2, 3, 4, etc., $k \leqslant \sqrt{2^n-1}$ tant que le reste est non nul.

On a vu que $2^{33}-1$ n'était divisible ni par 2 ni par 3, donc ce nombre n'est divisible ni par 4 ni par 6. Il faut regarder s'il est divisible par 5.

$2^{11} = 2\,048$ et $2\,048 \equiv 3 \quad [5] \Rightarrow \left(2^{11}\right)^3 \equiv 3^3 \quad [5]$, mais $3^3 = 27 \equiv 2 \quad [5]$, donc $2^{33} \equiv 2 \quad [5] \Rightarrow 2^{33}-1 \equiv 1 \quad [5]$; on en déduit que $2^{33}-1$ n'est pas divisible par 5.

On a vu que le nombre $2^{33}-1$ est divisible par 7, donc l'algorithme va afficher ce diviseur 7 et « CAS 2 ».

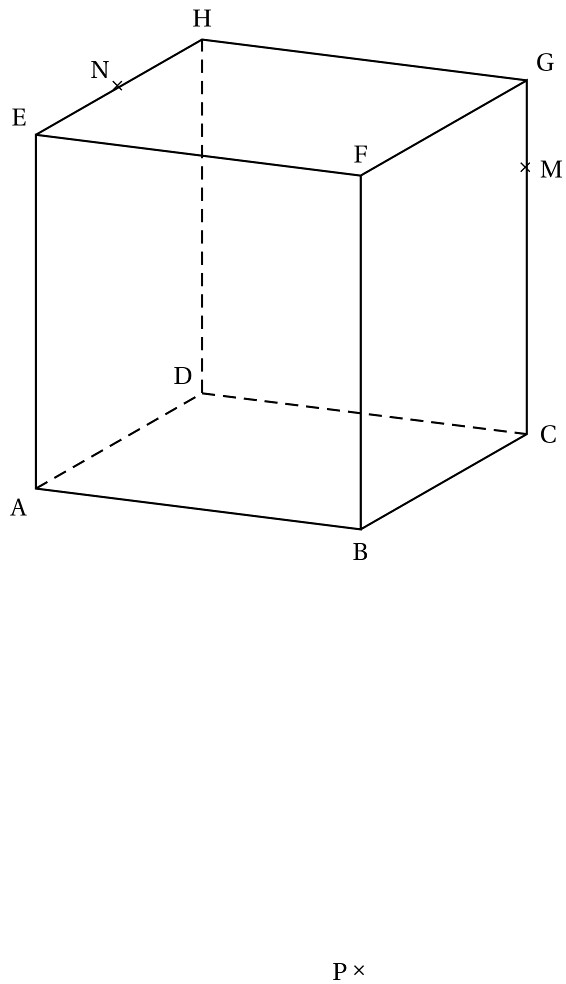
Si on entre $n = 7$, l'algorithme affiche 12 et « CAS 1 ».

b. Le CAS 2 concerne donc les nombres de Mersenne non premiers et le nombre k est le plus petit de ses diviseurs (différent de 1).

c. Le CAS 1 concerne les nombres de Mersenne premiers comme 2^7-1.

ANNEXE à remettre avec la copie

EXERCICE 4 : Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



Algorithme 1

Saisir $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$
d prend la valeur $x_N - x_M$
e prend la valeur $y_N - y_M$
f prend la valeur $z_N - z_M$
g prend la valeur $x_P - x_M$
h prend la valeur $y_P - y_M$
i prend la valeur $z_P - z_M$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$
Afficher k

Algorithme 2 (à compléter)

Saisir $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$
d prend la valeur $x_N - x_M$
e prend la valeur $y_N - y_M$
f prend la valeur $z_N - z_M$
g prend la valeur $x_P - x_M$
h prend la valeur $y_P - y_M$
i prend la valeur $z_P - z_M$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$
l prend la valeur $d^2 + e^2 + f^2$
m prend la valeur $g^2 + h^2 + i^2$
Si $k = 0$ et si $l = m$
Afficher : « Le triangle MNP est rectangle isocèle en M »
Sinon Afficher : « Le triangle MNP n'est pas rectangle ou n'est pas isocèle en M »