Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S Liban 31 mai 2016

Exercice 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

On considère un solide ADECBF constitué de deux pyramides identiques ayant pour base commune le carré ABCD de centre J. Une représentation en perspective de ce solide est donnée **en annexe (à rendre avec la copie)**. Toutes les arêtes sont de longueur 1.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AD}},\,\overrightarrow{\text{AK}}\right)$.

1. **a.** Montrons que $\text{IE} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   On sait que les deux pyramides ABCDE et ABCDF sont identiques, et que toutes les arêtes ont la même longueur 1. Ce sont donc des pyramides régulières à base carrée et E comme F ont pour projeté orthogonal sur ABCD le point I, centre du carré ABCD.

   I est le centre du carré ABCD de côté 1, c'est donc le milieu de [AC] et on a :

   $\text{AC} = \sqrt{2}$ et $\text{AI} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   Comme I est le projeté orthogonal de E sur ABCD, le triangle AEI est rectangle en I et on a :

   $\text{IE}^2 = \text{AE}^2 - \text{AI}^2 = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$. Et finalement $\boxed{\text{IE} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

   I est le milieu de [BD] et $\overrightarrow{\text{AI}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{AB}} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{AD}}$, d'où : $\boxed{\text{I}\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,0\right)}$.

   On a : $\overrightarrow{\text{AE}} = \overrightarrow{\text{AI}} + \overrightarrow{\text{IE}}$, d'où : $\boxed{\text{E}\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

   Par raison de symétrie par rapport à ABCD : $\boxed{\text{F}\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

   b. Montrons que le vecteur $\vec{n}\left(0\,;\,-2\,;\,\sqrt{2}\right)$ est normal au plan (ABE).

   On a : $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\text{AE}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

   $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AE}}$ ne sont pas colinéaires et on a : $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\vec{n} = 0$ et $\overrightarrow{\text{AE}}\cdot\vec{n} = 0$.

   $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan ABE donc $\vec{n}\,(0\,;\,-2\,;\,\sqrt{2})$ est normal au plan (ABE).

   c. Déterminons une équation cartésienne du plan (ABE).

   (ABE) passe par le point A(0; 0; 0) et a pour vecteur normal $\vec{n}\,(0\,;\,-2\,;\,\sqrt{2})$.

   On en déduit une équation cartésienne de (ABE) : $\boxed{-2y + \sqrt{2}z = 0}$.

2. On nomme M le milieu du segment [DF] et N celui du segment [AB].

   a. Démontrons que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles.

   Dans le plan (FDC) considérons les vecteurs $\overrightarrow{\text{DC}}$ et $\overrightarrow{\text{DF}}$ qui ne sont pas colinéaires.

   Comme ABCD est un carré on : $\overrightarrow{\text{DC}} = \overrightarrow{\text{AB}}$ et on a : $\overrightarrow{\text{DC}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

   D'autre part sachant que D(0 ; 1 ; 0), on a : $\overrightarrow{\text{DF}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$. On a : $\overrightarrow{\text{DC}}\cdot\vec{n} = 0$ et $\overrightarrow{\text{FD}}\cdot\vec{n} = 0$.

$\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (FDC) : $\overrightarrow{n}\left(0\,;\,-2\,;\,\sqrt{2}\right)$ est normal au plan (FDC)
Les plans (FDC) et (ABE) admettent un même vecteur normal donc ils sont parallèles.

b. Déterminons l'intersection des plans (EMN) et (FDC).
Comme M appartient à [EM] et que M est le milieu de [FD], M appartient à l'intersection de (EMN) et (FDC).
Comme (FDC) et (ABE) sont parallèles, le plan (EMN) les coupe suivant deux droites parallèles.
Or l'intersection de (EMN) et (ABE) est la droite (EN).
On en déduit que l'intersection de (EMN) avec (FDC) est la droite parallèle à (EN) passant par M.

c. Construisons (voir annexe) la section du solide ADECBF par le plan (EMN).
Soit G l'intersection de la parallèle à (EN) passant par M avec le plan (BCF) : c'est l'intersection de (EM) avec (CD).
Le segment [GM] est la section de la face FCD par le plan (EMN).
Par raison de symétrie, les plan (CDE) et (ABF) sont parallèles.
En tenant le même raisonnement que précédemment, on montre que le plan (EMN) les coupe suivant deux droites parallèles.
Or l'intersection de (EMN) avec le plan (CDE) est la droite (EG). Alors le plan(EMN) coupe le plan(ABF) suivant la parallèle à (ERG) passant par N.
Cette droite coupe (AF) en H.
Le segment [NH] est la section de la face ABF par le plan (EMN).
On en déduit que le polygone ENHMG est la section du solide par le plan (EMN).

Exercice 2 — 4 points

Commun à tous les candidats

Sur un court de tennis, un lance-balle permet à un joueur de s'entraîner seul. Cet appareil envoie des balles une par une à une cadence régulière. Le joueur frappe alors la balle puis la balle suivante arrive.
Suivant le manuel du constructeur, le lance-balle envoie au hasard la balle à droite ou à gauche avec la même probabilité.

Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats à 10^{-3} près.

Partie A

Le joueur s'apprête à recevoir une série de 20 balles.
Soit X le nombre de balles envoyées à droite. Comme le lance-balle envoie au hasard la balle à droite ou à gauche avec la même probabilité p, on a $p=\dfrac{1}{2}$. Comme d'autre part les lancers sont indépendants, X suit une loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=\dfrac{1}{2}$.

1. Calculons la probabilité que le lance-balle envoie 10 balles à droite.
C'est : $p(X=10)=\dbinom{20}{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^{10}=0,176$. $\boxed{p(X=10)\approx 0,176}$
2. Calculons la probabilité que le lance-balle envoie entre 5 et 10 balles à droite.
C'est : $p(5\leqslant X\leqslant 10)=p(X\leqslant 10)-p(X\leqslant 4)$.
À la calculatrice, on obtient : $\boxed{p(5\leqslant X\leqslant 10)=0,582}$.

Partie B

Le lance-balle est équipé d'un réservoir pouvant contenir 100 balles. Sur une séquence de 100 lancers, 42 balles ont été lancées à droite. Le joueur doute alors du bon fonctionnement de l'appareil.
Comme $n=100$ et $p=0,5$, on a : $n>30$, $np=50>5$ et $n(1-p)=50>5$.
On appelle X_{100} la variable aléatoire donnant le nombre de balles lancées à droite. Avec les mêmes hypothèses qu'au A, X_{100} suit une loi binomiale de paramètres $n=100$ et $p=0,5$.
On peut alors calculer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%.

$$I_n=\left[p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;p+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]\text{ donc } I_{100}\approx\left[0,40\,;0,60\right]$$

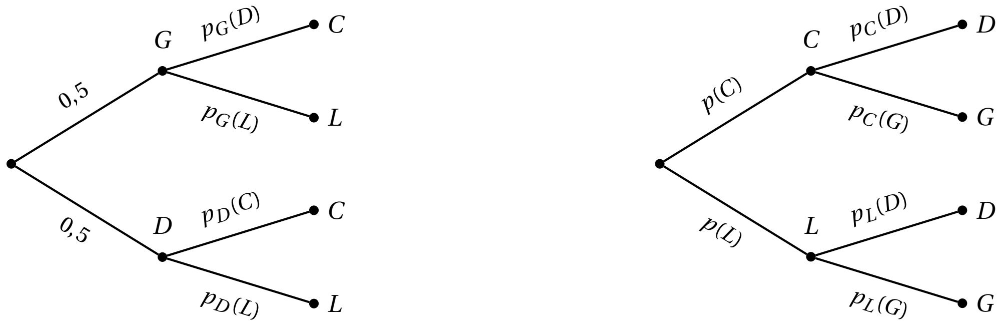
$0,42 \in I_{100}$ donc l'hypothèse que l'appareil fonctionne correctement est acceptée, au risque de 5 %.

Partie C

Pour augmenter la difficulté le joueur paramètre le lance-balle de façon à donner un effet aux balles lancées. Elles peuvent être soit « liftées » (L) soit « coupées (C) ». La probabilité que le lance-balle envoie une balle à droite est toujours égale à la probabilité que le lance-balle envoie une balle à gauche.
Les réglages de l'appareil permettent d'affirmer que :

- la probabilité que le lance-balle envoie une balle liftée à droite est $0,24$ donc $p(L \cap D) = 0,24$
- la probabilité que le lance-balle envoie une balle coupée à gauche est $0,235$donc $p(C \cap G) = 0,235$.

On peut construire deux arbres pondérés pour aider au raisonnement :



Si le lance-balle envoie une balle coupée, calculons la probabilité qu'elle soit envoyée à droite , c'est à dire $p_C(D)$.
On a : $p_D(C) = 1 - p_D(L) = 1 - \dfrac{p(D \cap L)}{p(D)} = 1 - \dfrac{0,24}{0,5} = 1 - 0,48 = 0,52$.
On en déduit : $p(C \cap D) = p(D) \times p_D(C) = 0,26$
Et : $p(C) = p(C \cap D) + p(C \cap G) = 0,26 + 0,235 = 0,495$.
Finalement : $p_C(D) = \dfrac{p(C \cap D)}{p(C)} = \dfrac{0,26}{0,495} = 0,525$ à 10^{-3} près. $\boxed{p_C(D) = 0,525}$

Exercice 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{1-x}}$.

Partie A

1. Étudions le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 1]$.
   f est dérivable sur $[0 ; 1]$ avec pour tout $x \in [0 ; 1]$: $f'(x) = \dfrac{-(-1)\mathrm{e}^{1-x}}{(1 + \mathrm{e}^{1-x})^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{1-x}}{(1 + \mathrm{e}^{1-x})^2}$.
   Pour tout $x \in [0 ; 1]$, $\mathrm{e}^{1-x} > 0$ et $(1 + \mathrm{e}^{1-x})^2 > 0$.
   On en déduit que pour tout $x \in [0 ; 1]$, $f'(x) > 0$ et donc que f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$.
2. En remarquant que $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1$, et que pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^x = 1$, on peut écrire :
   $f(x) = \dfrac{1}{1 + \mathrm{e} \times \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1 + \mathrm{e} \times \mathrm{e}^{-x})e^x} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}}$.
3. f est dérivable sur $[0 ; 1]$ donc continue et est de la forme $\dfrac{u'}{u}$; elle admet donc comme primitive pour tout $x \in [0 ; 1]$ la fonction F définie par : $F(x) = \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e})$.
   On en déduit que : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(e^x + e)\Big]_0^1 = \ln(2\mathrm{e}) - \ln(1 + \mathrm{e}) = \ln(2) + \ln(\mathrm{e}) - \ln(1 + \mathrm{e}) = \ln(2) + 1 - \ln(1 + \mathrm{e})$.

Partie B

Soit n un entier naturel. On considère les fonctions f_n définies sur $[0 ; 1]$ par : $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + n\mathrm{e}^{1-x}}$.
On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé.
On considère la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. On a tracé en annexe les courbes représentatives des fonctions f_n pour n variant de 1 à 5.
   Pour tout $x \in [0 ; 1]$, on a : $f_0(x) = \dfrac{1}{1 + 0 \times \mathrm{e}^{1-x}} = 1$.
   La courbe $\mathscr{C}_0$ représentative de la fonction f_0 est le segment d'équation $y = 1$ avec $x \in [0;1]$.

2. Soit n un entier naturel.

Pour tout $x \in [0~;~1]$, on a : $f_n(x) = \dfrac{1}{1+n\mathrm{e}^{1-x}} > 0$. On en déduit que u_n représente l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_n$ délimitée par l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

On a en particulier $u_0 = \displaystyle\int_0^1 1\,\mathrm{d}x = [x]_0^1 = 1$

3. Il semble que la suite (u_n) soit décroissante car les aires sont de plus en plus petites. Démontrons-le.

Soit n un entier naturel.

Pour tout réel $x \in [0~;~1]$, on a : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \dfrac{1}{1+(n+1)\mathrm{e}^{1-x}} - \dfrac{1}{1+n\mathrm{e}^{1-x}} = \dfrac{-e^{1-x}}{(1+n\mathrm{e}^{1-x})(1+(n+1)\mathrm{e}^{1-x})} < 0$.

On en déduit que pour tout réel $x \in [0;1]$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$ et comme par intégration sur un intervalle, l'ordre est conservé, on a pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x < \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $u_{n+1} < u_n$.

Ce qui prouve que la suite (u_n) est strictement décroissante.

4. Soit n un entier naturel.

Pour tout réel $x \in [0~;~1]$, on a :$f_n(x) = \dfrac{1}{1+n\mathrm{e}^{1-x}} > 0$ et donc $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x > 0$

Ce qui prouve que la suite (u_n) est minorée par 0.

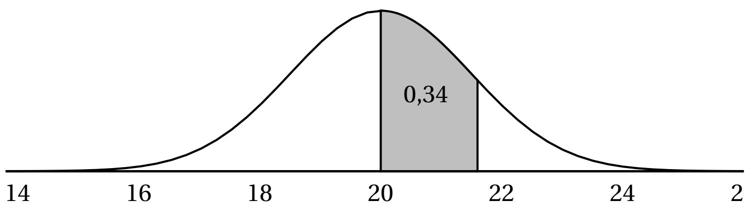
La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge et par conséquent elle admet une limite finie.

Exercice 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Un point est attribué par réponse exacte justifiée. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte et l'absence de réponse n'est pas pénalisée.

- Sur le schéma ci-dessous on a représenté la courbe de densité d'une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 20$. La probabilité que la variable aléatoire X soit comprise entre 20 et 21,6 est égale à $0,34$.



Affirmation 1 : La probabilité que la variable aléatoire X appartienne à l'intervalle $[23,2~;~+\infty[$ vaut environ 0,046.

Réponse : **FAUX**

Comme $p[20~;~21,6] = 0,34$, $p[20-1,6~;~21,6] = 2 \times 0,34$, c'est à dire $p[18,4~;~21,6] = 0,68$.

On en déduit qu'il s'agit d'un intervalle à un-σ. Donc $\sigma \approx 1,6$.

On sait alors que pour l'intervalle deux-σ, on a :

$p[20-2\times1,6; 20+2\times1,6] \approx 0,95$ et par conséquent $p[23,2; +\infty[= 0,5\times0,05 \approx 0,025$.

- Soit z un nombre complexe différent de 2. On pose : $Z = \dfrac{\mathrm{i}z}{z-2}$.

Affirmation 2 : L'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que $|Z| = 1$ est une droite passant par le point $A(1~;~0)$.

Réponse : **VRAI**

Pour tout nombre complexe z, $z \neq 2$, on a : $|Z| = 1 \iff \dfrac{|\mathrm{i}z|}{|z-2|} = 1 \iff \dfrac{|z|}{|z-2|} = 1 \iff |z| = |z-2|$.

Le point O a pour affixe 0 ; soit I le point d'affixe 2, et M le point d'affixe z : $|z| = |z-2| \iff OM = IM$.

Autrement dit $|Z| = 1$ si seulement si M appartient à la médiatrice de $[OI]$ dont A est le milieu.

Affirmation 3 : Z est un imaginaire pur si et seulement si z est réel.

Réponse : **VRAI**

Pour tout nombre complexe z, $z \neq 2$, on a :

Z est un imaginaire pur $\iff Z + \overline{Z} = 0 \iff \dfrac{\text{i}z}{z-2} + \overline{\left(\dfrac{\text{i}z}{z-2}\right)} = 0$

Pour tout nombre complexe z, $z \neq 2$, d'après les propriétés des conjugués, on a :

$\overline{\left(\dfrac{\text{i}z}{z-2}\right)} = \dfrac{\overline{\text{i}z}}{\overline{z-2}} = \dfrac{-\text{i}\overline{z}}{\overline{z}-2}$.

Pour tout nombre complexe z, $z \neq 2$,

Z est un imaginaire pur $\iff \dfrac{\text{i}z}{z-2} + \dfrac{-\text{i}\overline{z}}{\overline{z}-2} = 0 \iff \dfrac{\text{i}z(\overline{z}-2) - \text{i}\overline{z}(z-2)}{|z-2|^2} = 0 \iff -2\text{i}z + 2\text{i}\overline{z} = 0 \iff$
$-2\text{i}(z - \overline{z}) = 0$

Et finalement, pour tout nombre complexe z, $z \neq 2$, on a : Z est un imaginaire pur $\iff z - \overline{z} = 0 \iff z$réel.

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{3}{4+6\text{e}^{-2x}}$.

  Affirmation 4 : L'équation $f(x) = 0,5$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
  Réponse : **VRAI**

  La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{4+6\text{e}^{-2x}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{36e^{-2x}}{\left(4+6\text{e}^{-2x}\right)^2}$.

  On a pour tout réel x, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

  Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -2x = -\infty$, et que $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} \text{e}^t = 0$, par composition, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \text{e}^{-2x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{3}{4}$.

  Comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} -2x = +\infty$, et que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \text{e}^t = +\infty$, par composition, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \text{e}^{-2x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

  Sur $\mathbb{R}$, f est continue strictement croissante et $f(x)$ décrit $\left]0\,;\,\dfrac{3}{4}\right[$. De plus $0,5 \in \left]0\,;\,\dfrac{3}{4}\right[$.

  En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions continues strictement monotones sur un intervalle, on peut affirmer que l'équation $f(x) = 0,5$ n'a qu'une seule solution réelle.

  On peut aussi résoudre dans [0; 1] l'équation $f(x) = 0$ et on trouve une solution unique $x = \dfrac{\ln 3}{2}$.

  Affirmation 5 : L'algorithme suivant affiche en sortie la valeur 0,54.

Variables :	X et Y sont des réels
Initialisation :	X prend la valeur 0 Y prend la valeur $\dfrac{3}{10}$
Traitement :	Tant que $Y < 0,5$ X prend la valeur $X + 0,01$ Y prend la valeur $\dfrac{3}{4+6\text{e}^{-2X}}$ Fin Tant que
Sortie :	Afficher X

  Réponse : **FAUX**

  Si on demande à la calculatrice de donner les valeurs de $f(x)$ avec x qui varie à partir de 0 et avec un pas de 0,01, on constate que $f(0,54) \approx 0,4969 < 0,5$ mais $f(0,55) \approx 0,5002 > 0,5$.

  On sort de la boucle dès que Y donc $f(x)$ est strictement plus grand que $0,5$.

  Alors la valeur de sortie est $0,55$.

Exercice 4 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Un point est attribué par réponse exacte justifiée. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte et l'absence de réponse n'est pas pénalisée.

- On considère le système $\left\{\begin{array}{lll} n & \equiv & 1 \quad [5] \\ n & \equiv & 3 \quad [4] \end{array}\right.$ d'inconnue n entier relatif.

  Affirmation 1 : Si n est solution de ce système alors $n - 11$ est divisible par 4 et par 5.

  - Si n est solution du système, alors $n \equiv 1 \quad [5]$; donc $n - 11 \equiv -10 \quad [5]$. Or $-10 = 5 \times (-2) \equiv 0 \quad [5]$, donc $n - 11 \equiv 0 \quad [5]$, donc $n - 11$ est divisible par 5.

- Si n est solution du système, alors $n \equiv 3 \quad [4]$; donc $n-11 \equiv -8 \quad [4]$. Or $-8 = 4\times(-2) \equiv 0 \quad [4]$, donc $n-11 \equiv 0 \quad [4]$, donc $n-11$ est divisible par 4.

On a donc démontré que si n est solution du système, alors $n-11$ est divisible par 4 et par 5.

$\boxed{\textbf{Affirmation 1} \text{ vraie}}$

Affirmation 2 : Pour tout entier relatif k, l'entier $11+20k$ est solution du système.

- $11 = 2\times 5+1$ donc $11 \equiv 1 \quad [5]$; $20k = 5(4k) \equiv 0 \quad [5]$. Par somme, on peut dire que $11+20k \equiv 1 \quad [5]$.
- $11 = 2\times 4+3$ donc $11 \equiv 3 \quad [4]$; $20k = 4(5k) \equiv 0 \quad [4]$. Par somme, on peut dire que $11+20k \equiv 3 \quad [4]$.

$11+20k \equiv 1 \quad [5]$ et $11+20k \equiv 3 \quad [4]$ donc $11+20k$ est solution du système.

$\boxed{\textbf{Affirmation 2} \text{ vraie}}$

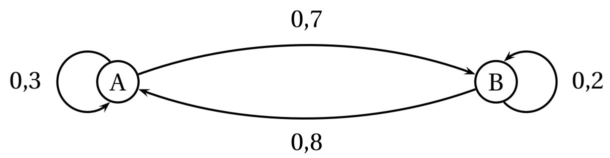
Affirmation 3 : Si un entier relatif n est solution du système alors il existe un entier relatif k tel que $n = 11+20k$.

On a vu que si n est solution du système, alors $n-11$ était divisible à la fois par 4 et par 5. Or 4 et 5 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, le nombre $n-11$ est divisible par $4\times 5 = 20$; donc il existe un entier relatif k tel que $n-11 = 20k$.

$\boxed{\textbf{Affirmation 3} \text{ vraie}}$

On a démontré que l'ensemble solution du système est $\left\{11+20k\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

- Un automate peut se trouver dans deux états A ou B. À chaque seconde il peut soit rester dans l'état où il se trouve, soit en changer, avec des probabilités données par le graphe probabiliste ci-dessous.
Pour tout entier naturel n, on note a_n la probabilité que l'automate se trouve dans l'état A après n secondes et b_n la probabilité que l'automate se trouve dans l'état B après n secondes. Au départ, l'automate est dans l'état B.



On considère l'algorithme suivant :

Variables :	a et b sont des réels
Initialisation :	a prend la valeur 0
	b prend la valeur 1
Traitement :	Pour k allant de 1 à 10
	a prend la valeur $0,8a+0,3b$
	b prend la valeur $1-a$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher a
	Afficher b

Affirmation 4 : En sortie, cet algorithme affiche les valeurs de a_{10} et b_{10}.

D'après le graphe, on peut dire que $\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 0,3a+0,8b \\ b_{n+1} & = & 0,7a+0,2b \end{array}\right.$ avec $\left\{\begin{array}{rcl} a_0 & = & 0 \\ b_1 & = & 1 \end{array}\right.$

Dans l'algorithme, on a « a prend la valeur $0,8a+0,3b$ » et il faudrait avoir « a prend la valeur $0,3a+0,8b$ ».

$\boxed{\textbf{Affirmation 4} \text{ fausse}}$

Affirmation 5 : Après 4 secondes, l'automate a autant de chances d'être dans l'état A que d'être dans l'état B.

On cherche a_4 :

$\left\{\begin{array}{rclcl} a_1 & = & 0,3a_0+0,8b_0 & = & 0,3\times 0+0,8\times 1 = 0,8 \\ b_1 & = & 1-a_1 & = & 0,2 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{rclcl} a_2 & = & 0,3a_1+0,8b_1 & = & 0,3\times 0,8+0,8\times 0,2 = 0,4 \\ b_2 & = & 1-a_2 & = & 0,6 \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{rclcl} a_3 & = & 0,3a_2+0,8b_2 & = & 0,3\times 0,4+0,8\times 0,6 = 0,6 \\ b_3 & = & 1-a_3 & = & 0,4 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{rclcl} a_4 & = & 0,3a_3+0,8b_3 & = & 0,3\times 0,6+0,8\times 0,4 = 0,5 \\ b_4 & = & 1-a_4 & = & 0,5 \end{array}\right.$

$a_4 = 0,5$ donc après 4 secondes, l'automate a autant de chances d'être dans l'état A que dans l'état B.

$\boxed{\textbf{Affirmation 5} \text{ vraie}}$

Exercice 5 — 5 points

Commun à tous les candidats

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} z_0 & = & 0 \\ z_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}\mathrm{i} \times z_n + 5 \end{cases}$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n.
On considère le nombre complexe $z_\mathrm{A} = 4 + 2\mathrm{i}$ et A le point du plan d'affixe z_A.

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = z_n - z_\mathrm{A}$.

a. Montrons que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\mathrm{i} \times u_n$.

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = z_{n+1} - z_\mathrm{A} = \dfrac{1}{2}\mathrm{i} \times z_n + 5 - (4 + 2\mathrm{i}) = \dfrac{1}{2}\mathrm{i} \times z_n + 1 - 2\mathrm{i}$.

Pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2}\mathrm{i} \times u_n = \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\,(z_n - z_\mathrm{A}) = \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\,(z_n - 4 - 2\mathrm{i}) = \dfrac{1}{2}\mathrm{i} \times z_n + 1 - 2\mathrm{i}$.

Et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\mathrm{i} \times u_n$.

b. On va démontrer par récurrence que, pour tout n, la propriété $\mathscr{P}_n$: $\left(\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n (-4 - 2\mathrm{i})$ est vraie.

- *Initialisation* : $u_0 = z_0 - z_A = -z_A = -4 - 2\mathrm{i}$; pour $n = 0$, $\left(\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n (-4 - 2\mathrm{i}) = \left(\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)^0 (-4 - 2\mathrm{i}) = -4 - 2\mathrm{i}$

  Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

- *Hérédité* : on suppose la propriété vraie au rang quelconque $p \leqslant 0$, c'est-à-dire $\left(\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)^p (-4 - 2\mathrm{i})$; on va la démontrer au rang $p + 1$.

  $u_{p+1} = \dfrac{1}{2}\mathrm{i}u_n = \dfrac{1}{2}\mathrm{i} \times \left(\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)^p (-4 - 2\mathrm{i}) = \left(\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)^{p+1} (-4 - 2\mathrm{i})$

  Donc la propriété est vraie au rang $p + 1$.

- La propriété est vraie au rang 0, elle est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

Pour tout entier naturel n, $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n (-4 - 2\mathrm{i})$

2. Démontrons que, pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{A}M_n}$ a pour affixe $u_n = z_n - z_\mathrm{A}$, et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{A}M_{n+4}}$ a pour affixe $u_{n+4} = z_{n+4} - z_\mathrm{A}$.

Mais d'après la question précédente, pour tout entier naturel n, $u_{n+4} = \left(\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)^{n+4} (-4 - 2\mathrm{i})$ et $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n (-4 - 2\mathrm{i})$.

On en déduit que pour tout entier naturel n, $u_{n+4} = \left(\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)^4 u_n$.

Mais $\left(\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)^4 = \dfrac{1}{16}$

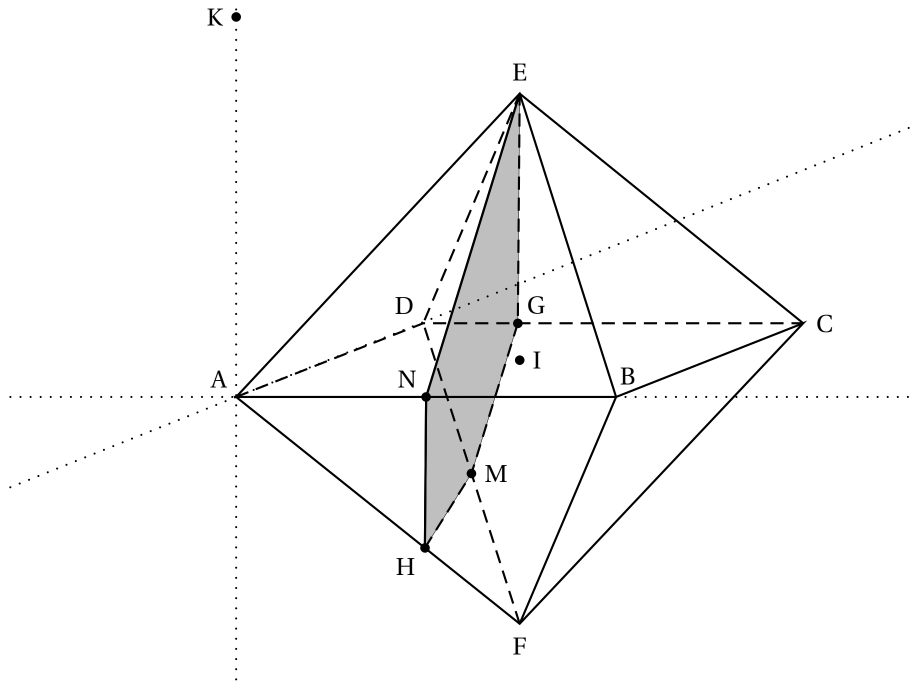
On en déduit que pour tout entier naturel n, $u_{n+4} = \dfrac{1}{16}u_n$ et $\overrightarrow{\mathrm{A}M_{n+4}} = \dfrac{1}{16}\overrightarrow{\mathrm{A}M_n}$

Ce qui prouve que, pour tout entier naturel n, les vecteurs sont colinéaires et par conséquent les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

Annexe

À rendre avec la copie

Exercice 1



Exercice 3