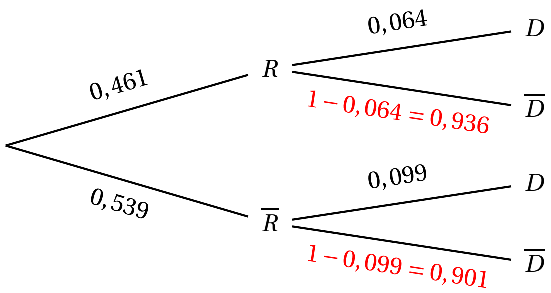
# Corrigé - Baccalauréat S Métropole–La Réunion
# 12 septembre 2016

**EXERCICE 1** — **COMMUN À TOUS LES CANDIDATS** — **6 POINTS**

**Partie 1**

On estime qu'en 2013 la population mondiale est composée de 4,6 milliards de personnes âgées de 20 à 79 ans et que 46,1 % des personnes âgées de 20 à 79 ans vivent en zone rurale et 53,9 % en zone urbaine.
En 2013, d'après la fédération internationale du diabète, 9,9 % de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone urbaine est atteinte de diabète et 6,4 % de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone rurale est atteinte de diabète.
On interroge au hasard une personne âgée de 20 à 79 ans. On note :
$R$ l'évènement : « la personne choisie habite en zone rurale »,
$D$ l'évènement : « la personne choisie est atteinte de diabète ».

1. On traduit cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité :

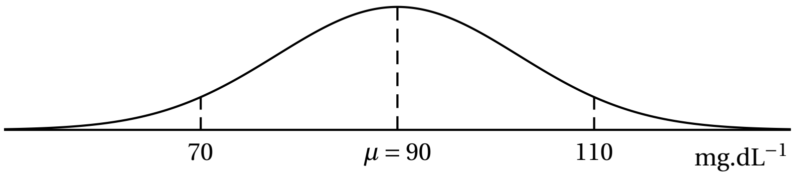



2. **a.** La probabilité que la personne interrogée soit diabétique est $P(D)$.
D'après la formule des probabilités totales :
$P(D) = P(R \cap D) + P(\overline{R} \cap D) = P(R) \times P_R(D) + P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(D)$
$= 0,461 \times 0,064 + 0,539 \times 0,099 = 0,029\,304 + 0,053\,361 = 0,082\,865$
$\approx 0,083$

   **b.** La personne choisie est diabétique. La probabilité qu'elle habite en zone rurale est $P_D(R)$ :
$P_D(R) = \dfrac{P(D \cap R)}{P(D)} = \dfrac{0,029\,504}{0,082\,865} \approx 0,356$

**Partie 2**

Une personne est dite en hypoglycémie si sa glycémie à jeun est inférieure à 60 mg.dL$^{-1}$ et elle est en hyperglycémie si sa glycémie à jeun est supérieure à 110 mg. dL$^{-1}$. La glycémie à jeun est considérée comme « normale » si elle est comprise entre 70 mg. dL$^{-1}$ et 110 mg.dL$^{-1}$. Les personnes ayant un taux de glycémie compris entre 60 et 70 mg.rdL$^{-1}$ ne font pas l'objet d'un suivi particulier.
On choisit au hasard un adulte dans cette population. Une étude a permis d'établir que la probabilité qu'il soit en hyperglycémie est 0,052 à $10^{-3}$ près. Dans la suite on admettra que cette probabilité est égale à 0,052.
On modélise la glycémie à jeun, exprimée en mg.dL$^{-1}$, d'un adulte d'une population donnée, par une variable aléatoire $X$ qui suit une loi normale d'espérance $\mu$ et d'écart-type $\sigma$.
On donne ci-dessous la représentation graphique de la densité de probabilité de la variable aléatoire $X$.



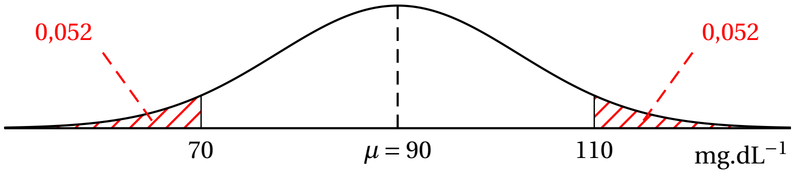

**1.** La glycémie « normale » est entre 70 et 110 mg.dL$^{-1}$ ; la probabilité que la personne choisie ait une glycémie à jeun « normale » est donc $P(70 \leqslant X \leqslant 110)$.

La probabilité qu'un adulte soit en hyperglycémie est 0,052 donc $P(X > 110) = 0,052$.

D'après la courbe donnée dans le texte, la moyenne $\mu$ est de 90 donc, pour des raisons de symétrie, comme $70 = 90-20$ et que $110 = 90+20$, $P(X < 70) = P(X > 110)$ et donc, $P(X < 70) = P(X > 110) = 0,052$.

$P(70 \leqslant X \leqslant 110) = 1 - P(X < 70) - P(X > 110) = 1 - 2 \times 0,052 = 0,896$

La probabilité qu'un adulte ait une glycémie « normale » est 0,896.




**2.** La variable aléatoire $X$ suit la loi normale de moyenne $\mu = 90$ et d'écart-type $\sigma$.

D'après le cours, on peut dire que la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-90}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

On a vu que $P(X < 70) = 0,052$.

Comme $\sigma > 0$, $X < 70 \iff X - 90 < -20 \iff \dfrac{X-90}{\sigma} < -\dfrac{20}{\sigma} \iff Z < -\dfrac{20}{\sigma}$

$P(X < 70) = 0,052 \iff P\left(Z < -\dfrac{20}{\sigma}\right) = 0,052$.

On sait que la variable aléatoire $Z$ suit la loi normale centrée réduite; si $P(Z < \beta) = 0,052$, on trouve à la calculatrice $\beta \approx -1,626$.

On a donc $-\dfrac{20}{\sigma} \approx -1,626$ ce qui donne $\sigma \approx \dfrac{20}{1,626}$ soit $\sigma \approx 12,3$.

La valeur de $\sigma$ arrondie au dixième est 12,3.

**3.** Dans cette question, on prend $\sigma = 12$.

La probabilité que la personne choisie soit en hypoglycémie est $P(X < 60)$.

À la calculatrice, pour la variable aléatoire $X$ qui suit la loi normale de paramètres $\mu = 90$ et $\sigma = 12$, on trouve $P(X < 60) \approx 0,006$.

La probabilité, arrondie au millième, que la personne choisie soit en hypoglycémie est 0,006.

**Partie 3**

Afin d'estimer la proportion, pour l'année 2013, de personnes diagnostiquées diabétiques dans la population française âgée de 20 à 79 ans, on interroge au hasard 10 000 personnes.
Dans l'échantillon étudié, 716 personnes ont été diagnostiquées diabétiques.

**1.** Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 % d'une fréquence $f$ dans un échantillon de taille $n$ est :

$$\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

La fréquence de personnes diagnostiquées diabétiques dans l'échantillon proposé de taille $n = 10\,000$ est $f = \dfrac{716}{10\,000} = 0{,}071\,6$.

On obtient l'intervalle $\left[0,0716-\dfrac{1}{\sqrt{10\,000}}\ ;\ 0,0716+\dfrac{1}{\sqrt{10\,000}}\right] = [0{,}061\,6\ ;\ 0{,}081\,6]$.

On peut donc dire que la probabilité que l'intervalle $[0{,}061\,6\ ;\ 0{,}081\,6]$ contienne la proportion d'adultes diabétiques dans la population totale est supérieure à 0,95.

**2.** L'amplitude de l'intervalle $\left[f-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

Pour que cette amplitude soit inférieure ou égale à 0,01, il faut trouver $n$ pour que $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0{,}01$ ce qui équivaut à $200 \leqslant \sqrt{n}$ ou encore $n \geqslant 40\,000$.

Il faut donc avoir un échantillon de taille supérieure ou égale à 40 000 pour que l'intervalle de confiance ait une amplitude inférieure ou égale à 0,01.

## EXERCICE 2 — COMMUN À TOUS LES CANDIDATS — 4 POINTS

On considère les nombres complexes $z_n$ définis pour tout entier $n \geqslant 0$ par la donnée de $z_0$, où $z_0$ est différent de 0 et de 1, et la relation de récurrence : $z_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{z_n}$.

**1. a.** Dans cette question, on suppose que $z_0 = 2$.

$z_1 = 1-\dfrac{1}{z_0} = 1-\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ ; $z_2 = 1-\dfrac{1}{z_1} = 1-2 = -1$ ; $z_3 = 1-\dfrac{1}{z_2} = 1-\dfrac{1}{-1} = 1+1 = 2$ ;

ensuite on retrouve $z_4 = \dfrac{1}{2}$, $z_5 = -1$ et $z_6 = 2$.

**b.** Dans cette question, on suppose que $z_0 = \text{i}$.

$z_1 = 1-\dfrac{1}{\text{i}} = 1+\text{i}$ ; $z_2 = 1-\dfrac{1}{z_1} = 1-\dfrac{1}{1+\text{i}} = 1-\dfrac{1-\text{i}}{1+1} = \dfrac{2-1+\text{i}}{2} = \dfrac{1+\text{i}}{2}$ ;

$z_3 = 1-\dfrac{1}{z_2} = 1-\dfrac{1}{\frac{1+\text{i}}{2}} = 1-\dfrac{2}{1+\text{i}} = \dfrac{1+\text{i}-2}{1+\text{i}} = \dfrac{-1+\text{i}}{1+\text{i}} = \dfrac{(-1+\text{i})(1-\text{i})}{(1+\text{i})(1-\text{i})} = \dfrac{-1+1+\text{i}+\text{i}}{1+1} = \text{i} = z_0$ ;

ensuite on retrouve $z_4 = z_1 = 1+\text{i}$ , puis $z_5 = \dfrac{1+\text{i}}{2}$ et $z_6 = \text{i}$.

**c.** Dans cette question on revient au cas général où $z_0$ est un complexe donné.

Des résultats de la question précédente, on peut conjecturer que $z_{3n} = z_0$, pour $n \in \mathbb{N}$.

On démontre cette conjecture par récurrence sur $n$ :

- **Initialisation :** on a bien $z_{3\times 0} = z_0$.
- **Hérédité :** supposons que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $z_{3p} = z_0$, alors

$$z_{3(p+1)} = z_{3p+3} = 1-\frac{1}{z_{3p+2}} = 1-\frac{1}{1-\frac{1}{z_{3p+1}}} = 1-\frac{z_{3p+1}}{z_{3p+1}-1} = \frac{z_{3p+1}-1-z_{3p+1}}{z_{3p+1}-1}$$

$$= \frac{-1}{z_{3p+1}-1} = \frac{-1}{1-\frac{1}{z_{3p}}-1} = \frac{-1}{-\frac{1}{z_{3p}}} = z_{3p} = z_0.$$

- **Conclusion :** on a donc démontré que $z_{3\times 0} = z_0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $z_{3p} = z_0$, alors $z_{3(p+1)} = z_0$ : d'après le principe de récurrence quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $z_{3n} = z_0$.

**2.** Comme $2016 = 3 \times 672$, on a d'après la question précédente $z_{2016} = z_0 = 1 + \mathrm{i}$.

**3.** On a $z_0 = z_1 \iff z_0 = 1 - \dfrac{1}{z_0}$ (avec $z_0 \neq 0$) ou encore

$z_0^2 = z_0 - 1 \iff z_0^2 - z_0 + 1 = 0 \iff \left(z_0 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = 0 \iff \left(z_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \iff \left(z_0 - \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z_0 - \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} z_0 - \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} & = & 0 \\ z_0 - \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} z_0 & = & \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_0 & = & \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$

Il y a donc deux valeurs de $z_0$ pour lesquelles $z_1 = z_0$.

Dans ces deux cas, $z_2 = 1 - \dfrac{1}{z_1} = 1 - \dfrac{1}{z_0} = z_1$, et ainsi de suite, donc les suites $(z_n)$ sont constantes.

## EXERCICE 3 CANDIDATS N'AYANT PAS SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ 5 POINTS

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 2 pièces A et B ayant chacune un côté pile et un côté face. Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.
Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on ne retourne aucune des deux pièces.
Au début du jeu, les 2 pièces sont du côté face.

**1.** Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face d'une pièce et 1 code le côté pile. Si $a$ code le côté de la pièce A à un instant donné, alors $1 - a$ code le côté de la pièce A après l'avoir retournée.

```
Variables :        a, b, d, s sont des entiers
                   i, n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1
Initialisation :   a prend la valeur 0
                   b prend la valeur 0
                   Saisir n
Traitement :       Pour i allant de 1 à n faire
                   | d prend la valeur d'un entier aléatoire compris entre 1 et 6
                   | Si d ⩽ 2
                   |    | alors a prend la valeur 1 − a
                   |    | sinon Si d ⩽ 4
                   |    |          | alors b prend la valeur 1 − b
                   |    |       FinSi
                   | FinSi
                   | s prend la valeur a + b
                   FinPour
Sortie :           Afficher s
```

**a.** On exécute cet algorithme en saisissant $n = 3$ et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour $d$ sont 1 ; 6 et 4.

| variables | $i$ | $d$ | $a$ | $b$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|---|
| initialisation | | | **0** | **0** | |
| 1er passage boucle Pour | **1** | **1** | **1** | **0** | **1** |
| 2e passage boucle Pour | **2** | **6** | **1** | **0** | **1** |
| 3e passage boucle Pour | **3** | **4** | **1** | **1** | **2** |

**b.** Les variables $a$ et $b$ sont à 0 ou 1 selon que la pièce montre le côté face ou le côté pile ; la variable $s = a + b$ donne donc le nombre de pièces qui sont du côté pile.
À la fin de cet algorithme, $s = 2$ donc les deux pièces sont du côté pile.

**2.** Pour tout entier naturel $n$, on note :

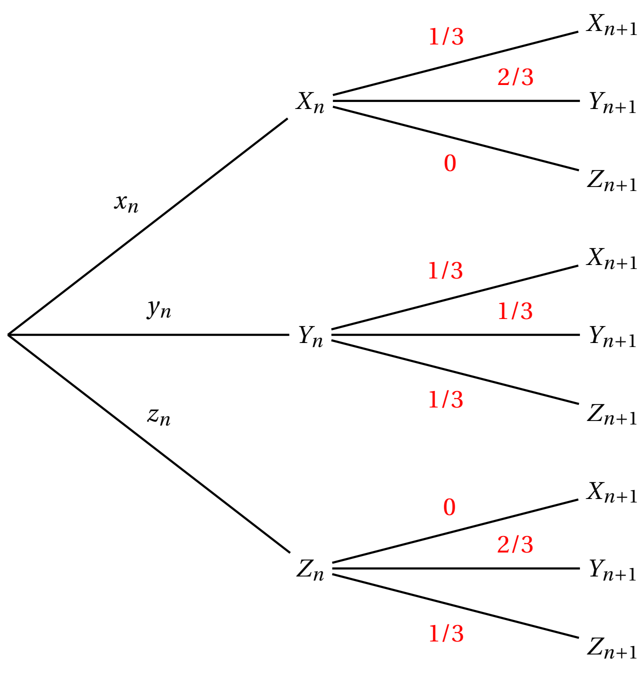
- $X_n$ l'évènement : « À l'issue de $n$ lancers de dés, les deux pièces sont du côté face »
- $Y_n$ l'évènement : « À l'issue de $n$ lancers de dés, une pièce est du côté pile et l'autre est du côté face »
- $Z_n$ l'évènement : « À l'issue de $n$ lancers de dés, les deux pièces sont du côté pile ».

De plus on note, $x_n = P(X_n)$ ; $y_n = P(Y_n)$ et $z_n = P(Z_n)$ les probabilités respectives des évènements $X_n$, $Y_n$ et $Z_n$.

**a.** Au début du jeu les deus pièces sont du côté face donc $x_0 = 1$ , $y_0 = 0$ et $z_0 = 0$.

**b.** $X_{n+1}$ est l'événement « À l'issue de $n+1$ lancers de dés, les deux pièces sont du côté face » ; on cherche donc la probabilité que, à l'issue de $n+1$ lancers, les deux pièces soient du côté face sachant qu'à l'issue de $n$ lancers elles étaient déjà les deux du côté face. Il faut donc qu'il n'y ait aucun retournement de pièce lors du $n+1$-ième lancer, c'est-à-dire qu'il faut que le dé tombe sur 5 ou 6 ; la probabilité de l'événement $\{5 ; 6\}$ est $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ puisque le dé est bien équilibré et donc qu'il y a équiprobabilité. Donc $P_{X_n}(X_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$.

**c.** On complète l'arbre proposé :




**d.** Pour tout entier naturel $n$, $x_n + y_n + z_n = 1$ donc $z_n = 1 - x_n - y_n$.

**e.** D'après la formule des probabilités totales :

$$y_{n+1} = P(Y_{n+1}) = P(X_n \cap Y_{n+1}) + P(Y_n \cap Y_{n+1}) + P(Z_n \cap Y_{n+1}) = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}z_n$$

$$= \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}(1 - x_n - y_n) = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x_n - \frac{2}{3}y_n = -\frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}$$

**f.** On pose, pour tout entier naturel $n$, $b_n = y_n - \frac{1}{2}$ donc $y_n = b_n + \frac{1}{2}$.

$b_{n+1} = y_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}\left(b_n + \frac{1}{2}\right) + \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = -\frac{1}{3}b_n - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}b_n - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}b_n$

$b_0 = y_0 - \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

Donc la suite $(b_n)$ est géométrique de raison $q = -\frac{1}{3}$ et de premier terme $b_0 = -\frac{1}{2}$.

On peut donc dire que, pour tout $n$, $b_n = b_0 \times q^n = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

Comme $y_n = b_n + \frac{1}{2}$, on en conclut que, pour tout $n$, $y_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

**g.** La suite $(b_n)$ est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$ ; comme $-1 < -\frac{1}{3} < 1$, on sait que la suite $(b_n)$ est convergente vers 0.

Or, pour tout $n$, $y_n = b_n + \frac{1}{2}$, donc la suite $(y_n)$ est convergente vers $\frac{1}{2}$ : $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \frac{1}{2}$.

Donc à long terme, la probabilité d'avoir une piède côté face et une pièce côté pile va tendre vers 0,5.

## EXERCICE 3 CANDIDATS AYANT SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ 5 POINTS

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 3 pièces A, B et C ayant chacune un côté pile et un côté face.

Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.

Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on retourne la pièce C.

Au début du jeu, les 3 pièces sont toutes du côté face.

**1.** Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face et 1 code le côté pile. Si $a$ code un côté de la pièce A, alors $1 - a$ code l'autre côté de la pièce A.

```
Variables :       a, b, c, d, s sont des entiers naturels
                  i, n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1
Initialisation :  a prend la valeur 0
                  b prend la valeur 0
                  c prend la valeur 0
                  Saisir n
Traitement :      Pour i allant de 1 à n faire
                  | d prend la valeur d'un entier aléatoire compris
                  | entre 1 et 6
                  | Si d ⩽ 2
                  |    | alors a prend la valeur 1 − a
                  |    | sinon Si d ⩽ 4
                  |    |           | alors b prend la valeur 1 − b
                  |    |           | sinon c prend la valeur 1 − c
                  |    |       FinSi
                  | FinSi
                  | s prend la valeur a + b + c
                  FinPour
Sortie :          Afficher s
```

**a.** On exécute cet algorithme en saisissant $n = 3$ et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour $d$ sont 1 ; 4 et 2.

On complète le tableau :

| variables | $i$ | $d$ | $a$ | $b$ | $c$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| initialisation | | | **0** | **0** | **0** | |
| 1^er^ passage boucle Pour | **1** | **1** | **1** | **0** | **0** | **1** |
| 2^e^ passage boucle Pour | **2** | **4** | **1** | **1** | **0** | **2** |
| 3^e^ passage boucle Pour | **3** | **2** | **0** | **1** | **0** | **1** |

**b.** Les variables $a$, $b$ et $c$ sont à 0 ou 1 selon que la pièce montre le côté face ou le côté pile ; la variable $s = a + b + c$ donne donc le nombre de pièces qui sont du côté pile.

Après une exécution de $n$ tirages, les trois pièces sont du côté pile si $s = 3$.

**2.** Pour tout entier naturel $n$, on note :

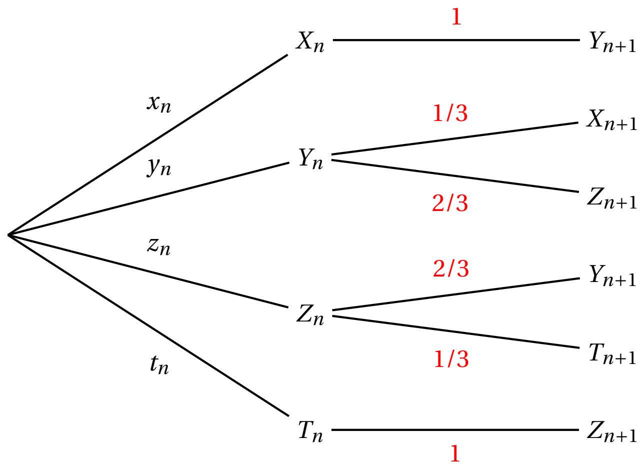
- $X_n$ l'évènement : « À l'issue de $n$ lancers de dés, les trois pièces sont du côté face »
- $Y_n$ l'évènement : « À l'issue de $n$ lancers de dés, une seule pièce est du côté pile et les autres sont du côté face »
- $Z_n$ l'évènement : « À l'issue de $n$ lancers de dés, exactement deux pièces sont du côté pile et l'autre est du côté face »
- $T_n$ l'évènement : « À l'issue de $n$ lancers de dés, les trois pièces sont du côté pile ».

De plus on note, $x_n = p(X_n)$ ; $y_n = p(Y_n)$ ; $z_n = p(Z_n)$ et $t_n = p(T_n)$ les probabilités respectives des évènements $X_n$, $Y_n$, $Z_n$ et $T_n$.

**a.** Au début du jeu, les trois pièces sont du côté face donc $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ et $t_0 = 0$.

**b.**
- À chaque tirage, on retourne une pièce et une seule ; donc si les trois pièces sont du côté face après le $n$-ième tirage, il y aura une et une seule pièce du côté pile après le $n+1$-ième tirage. On en déduit que $P_{X_n}(Y_{n+1}) = 1$.
- Par un raisonnement analogue, on démontre que $P_{T_n}(Z_{n+1}) = 1$.
- Si après le $n$-ième tirage, il y a une seule pièce du côté pile, il y a deux possibilités :
  - c'est cette pièce qui est retournée lors du $n+1$-ième tirage, avec une probabilité de $\dfrac{1}{3}$, et donc $P_{Y_n}(X_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$ ;
  - c'est une des deux autres pièces qui est retournée, avec une probabilité de $\dfrac{2}{3}$, et donc $P_{Y_n}(Z_{n+1}) = \dfrac{2}{3}$.
- Par un raisonnement analogue, on démontre que $P_{Z_n}(Y_{n+1}) = \dfrac{2}{3}$ et que $P_{Z_n}(T_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$.

On peut donc compléter l'arbre proposé :




3. Pour tout entier naturel $n$, on note $U_n$ la matrice ligne $\begin{pmatrix} x_n & y_n & z_n & t_n\end{pmatrix}$.

   **a.** $U_0 = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & t_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

   **b.** On cherche la matrice carrée $M$ telle que, pour tout entier naturel $n$, $U_{n+1} = U_n \times M$.
   D'après l'arbre et le théorème des probabilités totales, on peut dire que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{n+1} &=& \dfrac{1}{3}y_n \\ y_{n+1} &=& x_n + \dfrac{2}{3}z_n \\ z_{n+1} &=& \dfrac{2}{3}y_n + t_n \\ t_{n+1} &=& \dfrac{1}{3}z_n \end{array}\right.$$

   Cela s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} & z_{n+1} & t_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n & y_n & z_n & t_n\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Et donc $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. On va démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $U_n = U_0 \times M^n$.
   Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $U_n = U_0 \times M^n$.

   - **Initialisation**
     Pour $n = 0$, $M^0 = I_4$ la matrice identité d'ordre 4.
     $U_0 \times M^0 = U_0 \times I_4 = U_0$ donc la propriété est vraie au rang 0.

- **Hérédité**
  On suppose la propriété vraie pour un rang $p \geqslant 0$, c'est-à-dire $U_p = U_0 \times M^p$.
  $U_{p+1} = U_p \times M = U_0 \times M^p \times M = U_0 \times M^{p+1}$ donc la propriété est vraie au rang $p+1$ ; elle est donc héréditaire.
- **Conclusion**
  La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a donc démontré que, pour tout $n$, $U_n = U_0 \times M^n$.

**5.** On admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$x_n = \frac{(-1)^n + 3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1}{8}\ ; \qquad y_n = \frac{-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n - (-1)^n\times 3 + 3}{8}$$

$$z_n = \frac{-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n + (-1)^n\times 3 + 3}{8}\ ; \qquad t_n = \frac{-(-1)^n + 3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1}{8}$$

**a.** La probabilité qu'au bout de 5 lancers de dés, une seule des trois pièces soit du côté pile est $y_5$.

$$y_5 = \frac{-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^5 + 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^5 - (-1)^5\times 3 + 3}{8} = \frac{61}{81} \approx 0,753.$$

**b.**
- **Première affirmation**
  « À l'issue d'un nombre pair de lancers de dés, les pièces peuvent être toutes les trois du côté pile ».

  On veut savoir si, à l'issue d'un nombre pair de lancers, on peut avoir $t_n = 1$.
  Si $n$ est pair, alors $(-1)^n = 1$ et $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ ; on en déduit que $t_n = 0$.

  Donc l'affirmation est **fausse**.

- **Deuxième affirmation**
  « Au cours du jeu, la probabilité que les pièces soient toutes les trois du côté pile peut être supérieure ou égale à $\dfrac{1}{4}$ ».

  On a vu que si $n$ était pair, $t_n$ valait 0 qui est inférieur à $\dfrac{1}{4}$.
  Si $n$ est impair, $(-1)^n = -1$ et $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = -\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

  Donc $t_n = \dfrac{1 - 3\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n - 3\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 1}{8} = \dfrac{2 - 6\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{8} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n < \dfrac{1}{4}$
  Donc l'affirmation est **fausse**.

- **Troisième affirmation**
  « Au cours du jeu, la probabilité que les pièces soient toutes les trois du côté pile peut être supérieure ou égale à 0,249 ».

  On calcule $t_n$ pour quelques valeurs de $n$ :

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_n$ | 0 | 0 | 0,222 22 | 0 | 0,246 91 | 0 | 0,249 65 |

$t_7 > 0,249$ donc l'affirmation est **vraie**.

*Remarque*

On a vu plus haut que, pour $n$ impair, $t_n = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

La suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ est convergente et a pour limite $\frac{1}{4}$.

Donc il existe un rang $n_0$ à partir duquel $u_n > 0,249$.

La suite $(t_n)$ coïncide avec la suite $(u_n)$ pour tous les $n$ impairs.

Donc si $n_0$ est impair, $t_{n_0} = u_{n_0} > 0,249$.

Et si $n_0$ est pair, on prend $n_1 = n_0 + 1$ et $t_{n_1} = u_{n_1} > 0,249$.

*Les suites extraites ne sont certes pas au programme de terminale S mais cet exemple est assez facile à comprendre pour un élève attentif. Et puis, c'est tellement plus joli qu'avec la calculatrice !*

*Enfin ce raisonnement permet de dire qu'il existe un rang à partir duquel $t_n > 0{,}249\,999$.*

## EXERCICE 4 — COMMUN À TOUS LES CANDIDATS — 5 POINTS

Un hélicoptère est en vol stationnaire au-dessus d'une plaine. Un passager lâche verticalement un colis muni d'un parachute.

### Partie 1

Soit $v_1$ la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $v_1(t) = 5 \times \dfrac{\mathrm{e}^{0,3t} - 1}{\mathrm{e}^{0,3t} + 1}$.

1. La fonction $v_1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$v_1'(t) = 5 \times \frac{0,3\,\mathrm{e}^{0,3t}\left(\mathrm{e}^{0,3t}+1\right) - \left(\mathrm{e}^{0,3t}-1\right) \times \left(0,3\,\mathrm{e}^{0,3t}\right)}{\left(\mathrm{e}^{0,3t}+1\right)^2} = 5 \times \frac{0,3\,\mathrm{e}^{0,3t}\left(\mathrm{e}^{0,3t}+1-\mathrm{e}^{0,3t}+1\right)}{\left(\mathrm{e}^{0,3t}+1\right)^2}$$
$$= 5 \times \frac{0,3\,\mathrm{e}^{0,3t} \times 2}{\left(\mathrm{e}^{0,3t}+1\right)^2} = \frac{3\,\mathrm{e}^{0,3t}}{\left(\mathrm{e}^{0,3t}+1\right)^2}$$
Pour tout $t$, $\mathrm{e}^{0,3t} > 0$ donc $v_1(t) > 0$ donc la fonction $v_1$ est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. On suppose, dans cette question, que le parachute fonctionne correctement. On admet que $t$ secondes après qu'il a été lâché, la vitesse du colis (exprimée en m.s$^{-1}$) est égale, avant d'atteindre le sol, à $v_1(t)$.
On considère que le colis arrive en bon état sur le sol si sa vitesse à l'arrivée n'excède pas 6 m.s$^{-1}$.
On résout l'inéquation $v_1(t) < 6$ :
$$v_1(t) < 6 \iff 5 \times \frac{\mathrm{e}^{0,3t}-1}{\mathrm{e}^{0,3t}+1} < 6 \iff 5 \times \frac{\mathrm{e}^{0,3t}-1}{\mathrm{e}^{0,3t}+1} - 6 < 0$$
$$\iff \frac{5\,\mathrm{e}^{0,3t} - 5 - 6\,\mathrm{e}^{0,3t} - 6}{\mathrm{e}^{0,3t}+1} < 0 \iff \frac{-\,\mathrm{e}^{0,3t} - 11}{\mathrm{e}^{0,3t}+1} < 0$$
Pour tout $t$, $\mathrm{e}^{0,3t} > 0$ donc $-\,\mathrm{e}^{0,3t} - 11 < 0$ et $\mathrm{e}^{0,3t} + 1 > 0$, donc l'inéquation est toujours vérifiée : $v_1(t) < 6$ pour tout $t$. Donc le colis ne risque pas d'être endommagé si le parachute s'ouvre normalement.

### Partie 2

On suppose, dans cette partie, que le parachute ne s'ouvre pas.
On admet que, dans ce cas, avant que le colis atteigne le sol, sa vitesse (exprimée en m.s$^{-1}$), $t$ secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par : $v_2(t) = 32,7\left(1 - \mathrm{e}^{-0,3t}\right)$.

1. La vitesse, exprimée en m.s$^{-1}$, atteinte par le colis au bout de 10 secondes est $v_2(10)$ :
$$v_2(t) = 32,7\left(1 - \mathrm{e}^{-0,3\times 10}\right) \approx 31,1.$$
La valeur approchée à $10^{-1}$ de vitesse atteinte par le colis au bout de 10 secondes est 31,1 m.s$^{-1}$.

2. On résout l'équation $v_2(t) = 30$ m.s$^{-1}$.
$$v_2(t) = 30 \iff 32,7\left(1 - \mathrm{e}^{-0,3t}\right) = t \iff 1 - \mathrm{e}^{-0,3t} = \frac{30}{32,7}$$
$$\iff 1 - \frac{30}{32,7} = \mathrm{e}^{-0,3t} \iff \frac{2,7}{32,7} = \mathrm{e}^{-0,3t}$$
$$\iff \ln\left(\frac{2,7}{32,7}\right) = -0,3t \iff \frac{\ln\left(\dfrac{2,7}{32,7}\right)}{-0,3} = t$$
$\dfrac{\ln\left(\dfrac{2,7}{32,7}\right)}{-0,3} \approx 8,3$ donc au bout d'environ 8,3 secondes, le colis atteint la vitesse de 30 m.s$^{-1}$.

**3.** On sait que la chute du colis dure 20 secondes.
On admet que la distance, en mètres, qui sépare l'hélicoptère du colis, $T$ secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par : $d(T) = \displaystyle\int_0^T v_2(t)\ \mathrm{d}t$.

**a.** $d(T) = \displaystyle\int_0^T v_2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T 32,7\left(1 - \mathrm{e}^{-0,3t}\right)\mathrm{d}t$

La fonction $v_2$ a pour primitive la fonction $t \longmapsto 32,7\left(t - \dfrac{\mathrm{e}^{-0,3t}}{-0,3}\right)$ ;

on a $32,7\left(t - \dfrac{\mathrm{e}^{-0,3t}}{-0,3}\right) = 32,7\left(t + \dfrac{\mathrm{e}^{-0,3t}}{0,3}\right) = \dfrac{32,7}{0,3}\left(0,3t + \mathrm{e}^{-0,3t}\right) = 109\left(0,3t + \mathrm{e}^{-0,3t}\right)$.

Donc $d(T) = \left[109\left(0,3t + \mathrm{e}^{-0,3t}\right)\right]_0^T = 109\left(0,3T + \mathrm{e}^{-0,3T}\right) - 109\left(0 + \mathrm{e}^{-0,3\times 0}\right) = 109\left(\mathrm{e}^{-0,3T} + 0,3T - 1\right)$.

**b.** Le colis atteint le sol au bout de 20 secondes donc la distance qu'il parcourt est

$$d(20) = 109\left(\mathrm{e}^{-0,3\times 20} + 0,3\times 20 - 1\right) \approx 545 \text{ m}.$$

**4.** Le temps mis par le colis pour atteindre le sol si on l'avait lâché d'une hauteur de 700 mètres est la valeur de $T$ solution de l'équation $d(T) = 700$.

On étudie les variations de la fonction $d$ sur $[0\,;\,+\infty[$ :

$d'(T) = 109\left(-0,3\,\mathrm{e}^{-0,3T} + 0,3\right) = 32,7\left(1 - 0,3\,\mathrm{e}^{-0,3T}\right)$

$T \geqslant 0 \implies -0,3T \leqslant 0 \implies \mathrm{e}^{-0,3T} \leqslant 1 \implies 1 - 0,3\,\mathrm{e}^{-0,3T} \geqslant 0 \implies d'(T) \geqslant 0$

Donc la fonction $d$ est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

Or $d(0) = 0 < 700$ et $d(30) \approx 872 > 700$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires on peut dire que l'équation $d(T) = 700$ admet une solution unique $\alpha$ sur $[0\,;\,30[$ :

$\left.\begin{array}{lcl} d(24) & \approx & 675,9 < 700 \\ d(25) & \approx & 708,6 > 700 \end{array}\right\} \implies \alpha \in [24\,;\,25]$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{lcl} d(24,7) & \approx & 698,8 < 700 \\ d(24,8) & \approx & 702,0 > 700 \end{array}\right\} \implies \alpha \in [24,7\,;\,24,8]$

Le temps mis par le colis pour atteindre le sol si on l'avait lâché d'une hauteur de 700 mètres est comprise entre 24,7 et 24,8 secondes.