

Exercice 1

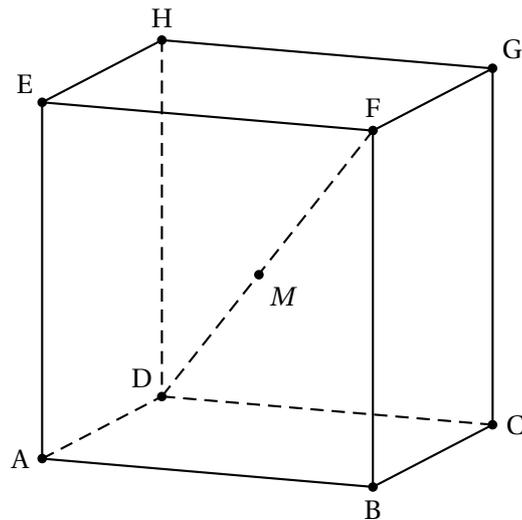
Commun à tous les candidats

6 points

On considère un cube ABCDEFGH dont la représentation graphique en perspective cavalière est donnée ci-contre.

Les arêtes sont de longueur 1.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.



Partie A

1. Montrer que le vecteur \overrightarrow{DF} est normal au plan (EBG).

Solution : Dans le repère orthonormé $(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$ on a $D(0; 0; 0)$, $F(1; 1; 1)$, $E(1; 0; 1)$, $B(1; 1; 0)$ et $G(0; 1; 1)$

donc $\overrightarrow{DF} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EB} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EG} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

On a alors $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{EB} = 0 + 1 - 1 = 0$ et $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{EG} = -1 + 1 + 0 = 0$.

\overrightarrow{DF} est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EBG), il est bien normal à ce plan.

2. Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).

Solution : $\overrightarrow{DF} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (EBG)

donc (EBG) a une équation de la forme : $x + y + z + d = 0$.

Or $E(1; 0; 1) \in (EBG)$, d'où $1 + 1 + d = 0 \iff d = -2$

Finalement une équation de (EBG) est : $x + y + z - 2 = 0$.

3. En déduire les coordonnées du point I intersection de la droite (DF) et du plan (EBG).

Solution : Une représentation paramétrique de (DF) est
$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Les coordonnées de I doivent donc vérifier le système :
$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Il en résulte $3t - 2 = 0 \iff t = \frac{2}{3}$. On a alors $I\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

On démontrerait de la même manière que le point J intersection de la droite (DF) et du plan (AHC) a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Partie B

À tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$, on associe le point M du segment $[DF]$ tel que $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DF}$.

On s'intéresse à l'évolution de la mesure θ en radian de l'angle \widehat{EMB} lorsque le point M parcourt le segment $[DF]$.

On a $0 \leq \theta \leq \pi$.

1. Que vaut θ si le point M est confondu avec le point D? avec le point F?

Solution :

Si M est confondu avec D alors $\widehat{EMB} = \widehat{EDB} = \frac{\pi}{3}$ car EDB est un triangle équilatéral de côté $\sqrt{2}$.

Si M est confondu avec F alors $\widehat{EMB} = \widehat{EFB} = \frac{\pi}{2}$ car EFB est un triangle rectangle en F.

2. a. Justifier que les coordonnées du point M sont $(x; x; x)$.

Solution : $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DF} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DM} \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$ or $D(0; 0; 0)$

On a donc bien $M(x; x; x)$.

- b. Montrer que $\cos(\theta) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 4x + 2}$. On pourra pour cela s'intéresser au produit scalaire des vecteurs \overrightarrow{ME} et \overrightarrow{MB} .

Solution : $\overrightarrow{ME} \begin{pmatrix} 1-x \\ -x \\ 1-x \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} 1-x \\ 1-x \\ -x \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MB} = (1-x)^2 - x(1-x) - x(1-x) = (1-x)(1-3x) = 3x^2 - 4x + 1$$

De plus $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MB} = ME \times MB \times \cos(\widehat{EMB})$

$$= \sqrt{(1-x)^2 + (-x)^2 + (1-x)^2} \sqrt{(1-x)^2 + (1-x)^2 + (-x)^2} \times \cos(\theta)$$

$$= \sqrt{3x^2 - 4x + 2} \sqrt{3x^2 - 4x + 2} \times \cos(\theta)$$

$$= (3x^2 - 4x + 2) \cos(\theta)$$

Pour tout réel x , $3x^2 - 4x + 2 \neq 0$ car $\Delta = -8 < 0$.

$$\text{On a donc bien } \cos(\theta) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 4x + 2}$$

3. On a construit ci-dessous le tableau de variations de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{3x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 4x + 2}$$

x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
Variations de f	$\frac{1}{2}$	↘	0	↘
			$-\frac{1}{2}$	↗
				0

Pour quelles positions du point M sur le segment $[DF]$:

- a. le triangle MEB est-il rectangle en M ?

Solution : Le triangle est rectangle en M si $\cos(\theta) = \cos(\widehat{EMB}) = 0$.
Il y a donc deux positions du point M :
pour $x = \frac{1}{3}$ et pour $x = 1$ c'est à dire pour M en J ou pour M en F

- b. l'angle θ est-il maximal ?

Solution :
L'angle θ est maximal quand son cosinus est minimal car la fonction cosinus est décroissante sur $[0; \pi]$; c'est à dire quand $x = \frac{2}{3}$ autrement dit quand M est confondu avec I .

Exercice 2

6 points

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, on étudie quelques grandeurs caractéristiques du fonctionnement des parkings d'une ville. Dans tout l'exercice, les probabilités seront données avec une précision de 10^{-4} .

Les parties A, B, et C sont indépendantes

Partie A - Durée d'attente pour entrer dans un parking souterrain

On appelle durée d'attente le temps qui s'écoule entre le moment où la voiture se présente à l'entrée du parking et le moment où elle franchit la barrière d'entrée du parking. Le tableau suivant présente les observations faites sur une journée.

Durée d'attente en minute	$[0; 2[$	$[2; 4[$	$[4; 6[$	$[6; 8[$
Nombre de voitures	75	19	10	5

1. Proposer une estimation de la durée d'attente moyenne d'une voiture à l'entrée du parking.

Solution : On assimile chaque intervalle à son centre pour effectuer la moyenne :

$$\frac{75 \times 1 + 19 \times 3 + 10 \times 5 + 5 \times 7}{75 + 19 + 10 + 5} = \frac{217}{109} \approx 2.$$

Donc la durée moyenne d'attente serait d'environ 2 minutes.

2. On décide de modéliser cette durée d'attente par une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ .

- a. Justifier que l'on peut choisir $\lambda = 0,5$.

Solution : On a $E(T) = \frac{1}{\lambda}$ et $E(T) = 2$ donc $\lambda = 0,5$.

- b. Une voiture se présente à l'entrée du parking. Quelle est la probabilité qu'elle mette moins de deux minutes pour franchir la barrière ?

Solution : On cherche $P(T \leq 2)$

$$P(T \leq 2) = \int_0^2 0,5e^{-0,5t} dt = [-e^{-0,5t}]_0^2 = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} \approx 0,6321$$

- c. Une voiture attend à l'entrée du parking depuis une minute. Quelle est la probabilité qu'elle franchisse la barrière dans la minute suivante ?

Solution : On cherche $P_{T \geq 1}(T \leq 2)$

T suit une loi exponentielle donc une loi de durée de vie sans vieillissement donc

$$\forall h > 0, P_{T \geq h}(T \geq t + h) = P(T \geq t)$$

Par passage au complémentaire on a donc : $\forall h > 0, P_{T \geq h}(T \leq t + h) = P(T \leq t)$.

On en déduit $P_{T \geq 1}(T \leq 2) = P_{T \geq 1}(T \leq 1 + 1) = P(T \leq 1)$

$$P(T \leq 1) = \int_0^1 0,5e^{-0,5t} dt = [-e^{-0,5t}]_0^1 = 1 - e^{-0,5} = 1 - \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,3935$$

Partie B - Durée et tarifs de stationnement dans ce parking souterrain

Une fois garée, la durée de stationnement d'une voiture est modélisée par une variable aléatoire D qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 70$ min et d'écart-type $\sigma = 30$ min.

1. a. Quelle est la durée moyenne de stationnement d'une voiture ?

Solution : La durée moyenne de stationnement est $\mu = 70$ min.

- b. Un automobiliste entre et se gare dans le parking. Quelle est la probabilité que sa durée de stationnement dépasse deux heures ?

Solution : On cherche $P(D \geq 120)$

$$P(D \geq 120) \approx 0,0478$$

- c. À la minute près, quel est le temps maximum de stationnement pour au moins 99 % des voitures ?

Solution : On cherche le plus petit t tel que $P(D \leq t) \geq 0,99$.

À l'aide de la calculatrice, $t \approx 139,8$ donc le temps maximum de stationnement pour au moins 99% des véhicules est d'environ 2 heures et 20 minutes.

2. La durée de stationnement est limitée à trois heures. Le tableau donne le tarif de la première heure et chaque heure supplémentaire est facturée à un tarif unique. Toute heure commencée est due intégralement.

Durée de stationnement	Inférieure à 15 min	Entre 15 min et 1 h	Heure supplémentaire
Tarif en euros	Gratuit	3,5	t

Déterminer le tarif t de l'heure supplémentaire que doit fixer le gestionnaire du parking pour que le prix moyen de stationnement d'une voiture soit de 5 euros.

Solution : Soit X la variable aléatoire donnant le tarif de stationnement en euro, la loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	3,5	$3,5 + t$	$3,5 + 2t$	TOTAL
$P(X = x_i)$	$P(D \leq 15) \approx 0,0334$	$P(15 \leq D \leq 60) \approx 0,3361$	$P(60 \leq D \leq 120) \approx 0,5828$	$P(120 \leq D \leq 180) \approx 0,0477$	1

$$\begin{aligned} \text{On a alors } E(X) = 5 &\iff 3,5 \times 0,3361 + 0,5828 \times (3,5 + t) + 0,0477 \times (3,5 + 2t) = 5 \\ &\iff 3,3831 + 0,6782t = 5 \\ &\iff t = \frac{1,6169}{0,6782} \approx 2,38 \end{aligned}$$

Le tarif doit être de 2 euros et 38 centimes par heure supplémentaire pour que le prix moyen soit de 5 euros.

Partie C - Temps d'attente pour se garer dans un parking de centre-ville

La durée de stationnement d'une voiture dans un parking de centre-ville est modélisée par une variable aléatoire T' qui suit une loi normale d'espérance μ' et d'écart-type σ' .

On sait que la moyenne du temps de stationnement dans ce parking est égale à 30 minutes et que 75 % des voitures ont un temps de stationnement inférieur à 37 minutes.

Le gestionnaire du parking vise l'objectif que 95 % des voitures aient un temps de stationnement entre 10 et 50 minutes. Cet objectif est-il atteint ?

Solution : On a $\mu' = 30$ d'après l'énoncé

T' suit donc la loi normale d'espérance $\mu' = 30$ et d'écart type σ' .

On a, de plus, $P(T' \leq 37) = 0,75$.

Soit $Z = \frac{T' - 30}{\sigma'}$ alors Z suit la loi normale centrée réduite d'après le théorème de Moivre-Laplace

$$T' \geq 37 \iff Z \leq \frac{7}{\sigma'}$$

$$P(T' \leq 37) = 0,75 \iff P\left(Z \leq \frac{7}{\sigma'}\right) = 0,75$$

D'après la calculatrice, $\frac{7}{\sigma'} \approx 0,6745$ soit $\sigma' \approx 10,38 \approx 10$ min.

On sait alors que $P(\mu' - 2\sigma' \leq T' \leq \mu' + 2\sigma') = P(10 \leq T' \leq 50) \approx 0,95$.

On peut considérer l'objectif atteint.

Exercice 3

3 points

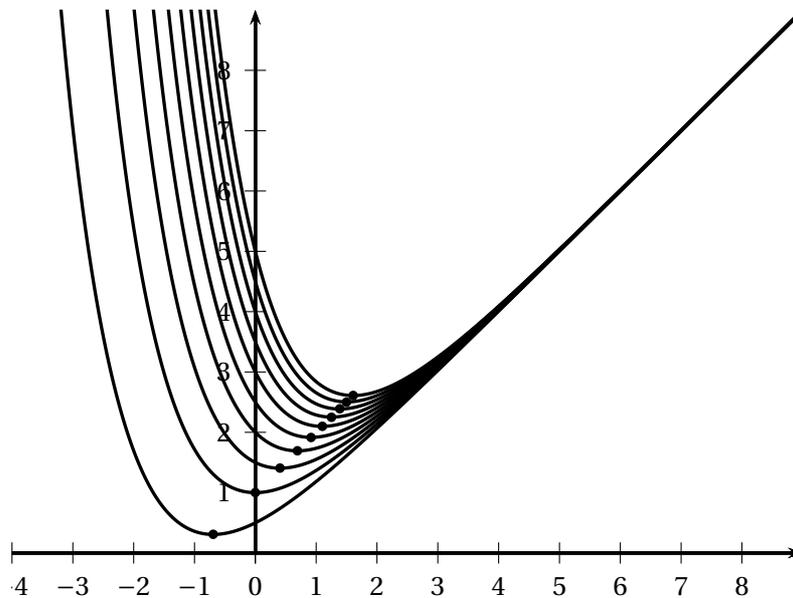
Commun à tous les candidats

Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur \mathbb{R} par :

$$f_k(x) = x + ke^{-x}.$$

On note \mathcal{C}_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé.

On a représenté ci-dessous quelques courbes \mathcal{C}_k pour différentes valeurs de k .



Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur \mathbb{R} . La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe \mathcal{C}_k . Il semblerait que, pour tout réel k strictement positif, les points A_k soient alignés.

Est-ce le cas ?

Solution : Les fonctions f_k sont dérivables sur \mathbb{R}

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'_k(x) = 1 - ke^{-x}$$

$$f'_k(x) < 0 \iff 1 - ke^{-x} < 0 \iff \frac{1}{k} < e^{-x} \iff \ln\left(\frac{1}{k}\right) < -x \iff -\ln(k) < -x \iff \ln(k) > x$$

La fonction f_k admet donc un minimum en $x = \ln(k)$.

$$f_k(\ln(k)) = \ln(k) + 1$$

Donc le point A_k a pour coordonnées $(\ln(k); \ln(k) + 1)$.

Les points A_k sont donc bien alignés puisque leurs coordonnées vérifient l'équation $y = x + 1$.

Exercice 4

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'épicéa commun est une espèce d'arbre résineux qui peut mesurer jusqu'à 40 mètres de hauteur et vivre plus de 150 ans.

L'objectif de cet exercice est d'estimer l'âge et la hauteur d'un épicéa à partir du diamètre de son tronc mesuré à 1,30 m du sol.

Partie A - Modélisation de l'âge d'un épicéa

Pour un épicéa dont l'âge est compris entre 20 et 120 ans, on modélise la relation entre son âge (en années) et le diamètre de son tronc (en mètre) mesuré à 1,30 m du sol par la fonction f définie sur l'intervalle $]0; 1[$ par :

$$f(x) = 30 \ln\left(\frac{20x}{1-x}\right)$$

où x désigne le diamètre exprimé en mètre et $f(x)$ l'âge en années.

- Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0; 1[$.

Solution : $f = 30\ln(u)$ avec u définie, continue, dérivable et strictement positive sur $]0 ; 1[$. f est donc dérivable sur $]0 ; 1[$.

$$f = 30\ln(u) \implies f' = 30 \times \frac{u'}{u}$$

$$u = \frac{v}{w} \implies u' = \frac{v'w - vw'}{w^2} \text{ avec } \begin{cases} v(x) = 20x \\ w(x) = 1-x \end{cases} \implies \begin{cases} v'(x) = 20 \\ w'(x) = -1 \end{cases} \text{ alors } u'(x) = \frac{20(1-x) + 20x}{(1-x)^2} = \frac{20}{(1-x)^2}$$

$$\forall x \in]0 ; 1[, f'(x) = 30 \times \frac{20}{(1-x)^2} \times \frac{1-x}{20x} = \frac{30}{x(1-x)} > 0$$

f est donc strictement croissante sur $]0 ; 1[$

2. Déterminer les valeurs du diamètre x du tronc tel que l'âge calculé dans ce modèle reste conforme à ses conditions de validité, c'est-à-dire compris entre 20 et 120 ans.

Solution : Deux méthodes :

Par résolution d'inéquations

On cherche x tel que $20 \leq f(x) \leq 120$.

$$\bullet f(x) \geq 20 \iff \ln\left(\frac{20x}{1-x}\right) \geq \frac{2}{3} \iff \frac{20x}{1-x} > e^{\frac{2}{3}} \iff x(20 + e^{\frac{2}{3}}) \geq e^{\frac{2}{3}} \iff x \geq \frac{e^{\frac{2}{3}}}{20 + e^{\frac{2}{3}}}$$

$$\text{On pose } \alpha = \frac{e^{\frac{2}{3}}}{20 + e^{\frac{2}{3}}}; \alpha \approx 0,09 \in [0 ; 1].$$

$$\bullet f(x) \leq 120 \iff \ln\left(\frac{20x}{1-x}\right) \leq 4 \iff \frac{20x}{1-x} \leq e^4 \iff x(20 + e^4) \leq e^4 \iff x \leq \frac{e^4}{20 + e^4}$$

$$\text{On pose } \beta = \frac{e^4}{20 + e^4}; \beta \approx 0,73 \in [0 ; 1].$$

$$f(x) \in [20 ; 120] \iff x \in [\alpha ; \beta]$$

Par balayage

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{20x}{1-x} = 0^+ \text{ par quotient donc en posant } X = \frac{20x}{1-x} \text{ on a } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{X \rightarrow 0 \\ X > 0}} \ln(X) = -\infty$$

$$\text{de même, } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{X \rightarrow +\infty \\ X < +\infty}} \ln(X) + \infty \text{ car } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{20x}{1-x} = +\infty \text{ par quotient}$$

f est continue et strictement croissante sur $]0 ; 1[$ à valeurs dans $]-\infty ; +\infty[$ or 20 et 120 appartiennent à l'intervalle $]-\infty ; +\infty[$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, les équations $f(x) = 20$ et $f(x) = 120$ admettent chacune une solution unique

$$\alpha \approx 0,09 \text{ et } \beta \approx 0,73$$

Donc le diamètre d'un tronc est entre 9 et 73 cm

Partie B

On a relevé la hauteur moyenne des épicéas dans des échantillons représentatifs d'arbres âgés de 50 à 150 ans. Le tableau suivant, réalisé à l'aide d'un tableur regroupe ces résultats et permet de calculer la vitesse de croissance moyenne d'un épicéa.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Âges (en années)	50	70	80	85	90	95	100	105	110	120	130	150
2	Hauteurs (en mètres)	11,2	15,6	18,05	19,3	20,55	21,8	23	24,2	25,4	27,6	29,65	33
3	Vitesse de croissance (en mètres par année)		0,22	0,245	0,25								

1. a. Interpréter le nombre 0,245 dans la cellule D3.

Solution : Il s'agit de la moyenne annuelle de croissance en mètres entre les âges de 70 et 80 ans :

$$\frac{18,05 - 15,6}{10} = \frac{2,45}{10} = 0,245.$$

- b. Quelle formule doit-on entrer dans la cellule C3 afin de compléter la ligne 3 en recopiant la cellule C3 vers la droite ?

Solution : «=(C2-B2) ÷ (C1-B1) »

2. Déterminer la hauteur attendue d'un épicéa dont le diamètre du tronc mesuré à 1,30 m du sol vaut 27 cm.

Solution : Il faut d'abord déterminer l'âge de l'épicéa.

$$f(0,27) = 30 \ln \left(\frac{5,4}{0,73} \right) \approx 60$$

Un épicéa de 60 ans devrait mesurer 13,40 m si on considère qu'entre 50 et 70 ans la croissance annuelle moyenne est de 0,22 m.

3. La qualité du bois est meilleure au moment où la vitesse de croissance est maximale.

- a. Déterminer un intervalle d'âges durant lequel la qualité du bois est la meilleure en expliquant la démarche.

Solution : On complète le tableau donné dans le texte en supprimant les colonnes du début :

	...	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	...	85	90	95	100	105	110	120	130	150
2	...	19,3	20,55	21,8	23	24,2	25,4	27,6	29,65	33
3	...	0,25	0,25	0,25	0,24	0,24	0,24	0,22	0,205	0,1675

On trouve en E3, F3 et G3 0,25 , puis 0,24 en H3, les valeurs suivantes étant elles aussi inférieures à 0,25. qui est la plus grande valeur.

Donc la vitesse de croissance moyenne annuelle est maximale entre 80 ans et 95 ans. Ceci nous donne donc l'intervalle d'âges sur lequel la qualité du bois est la meilleure.

- b. Est-il cohérent de demander aux bûcherons de couper les arbres lorsque leur diamètre mesure environ 70 cm ?

Solution : L'âge d'un épicéa de diamètre 70 cm est $f(0,7) = 30 \ln \left(\frac{14}{0,3} \right) \approx 115$ ans

Il n'est donc pas cohérent de demander aux bûcherons de couper des épicéa de diamètre 70 cm puisque la qualité du bois n'est plus la meilleure.

Exercice 4**5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Un numéro de carte bancaire est de la forme :

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} a_{15} c$$

où a_1, a_2, \dots, a_{15} et c sont des chiffres compris entre 0 et 9.

Les quinze premiers chiffres contiennent des informations sur le type de carte, la banque et le numéro de compte bancaire.

 c est la clé de validation du numéro. Ce chiffre est calculé à partir des quinze autres.

L'algorithme suivant permet de valider la conformité d'un numéro de carte donné.

Initialisation : I prend la valeur 0
 P prend la valeur 0
 R prend la valeur 0

Traitement : Pour k allant de 0 à 7 :
 | R prend la valeur du reste de la division euclidienne de $2a_{2k+1}$ par 9
 | I prend la valeur $I + R$
 Fin Pour
 Pour k allant de 1 à 7 :
 | P prend la valeur $P + a_{2k}$
 Fin Pour
 S prend la valeur $I + P + c$

Sortie : Si S est un multiple de 10 alors :
 | Afficher « Le numéro de la carte est correct. »
 Sinon :
 | Afficher « Le numéro de la carte n'est pas correct. »
 Fin Si

1. On considère le numéro de carte suivant : 5635 4002 9561 3411.

a. Compléter le tableau en annexe permettant d'obtenir la valeur finale de la variable I .

Solution :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}	5	3	4	0	9	6	3	1
$2a_{2k+1}$	10	6	8	0	18	12	6	2
R	1	6	8	0	0	3	6	2
I	1	7	15	15	15	18	24	26

b. Justifier que le numéro de la carte 5635 4002 9561 3411 est correct.

Solution : P est la somme des 7 premiers chiffres de rang pair $P = 6 + 5 + 0 + 2 + 5 + 1 + 4 = 23$
 $S = I + P + c = 26 + 23 + 1 = 50$ est un multiple de 10 donc le numéro de carte est correct.

c. On modifie le numéro de cette carte en changeant les deux premiers chiffres. Le premier chiffre (initialement 5) est changé en 6.

Quel doit être le deuxième chiffre a pour que le numéro de carte obtenu 6a35 4002 9561 3411 reste correct ?

Solution : Le changement du premier chiffre change la valeur de I qui devient 28.
 P prendra la valeur $17 + a$.
 $S = 28 + 17 + a + 1 = 46 + a$ sera un multiple de 10 si et seulement si $a = 4$.

2. On connaît les quinze premiers chiffres du numéro d'une carte bancaire.

Montrer qu'il existe une clé c rendant ce numéro de carte correct et que cette clé est unique.

Solution : Soit u le chiffre des unités de la somme $I + P$

Si $u = 0$ alors seul $c = 0$ convient pour que S soit multiple de 10

Si $u > 0$ alors seul $c = 10 - u$ convient pour que S soit multiple de 10

Finalement il existe bien une unique clé c rendant le numéro de carte correct.

3. Un numéro de carte dont les chiffres sont tous égaux peut-il être correct? Si oui, donner tous les numéros de carte possibles de ce type.

Solution :

Notons a le chiffre qui apparaît 10 fois dans le numéro de carte bancaire.

- Si $0 \leq a < 5$

On a : $I = 8 \times 2a = 16a$, $P = 7a$ et $c = a$.

Le numéro est correct si : $I + P + c \equiv 0 \pmod{10}$ ce qui équivaut à $24a \equiv 0 \pmod{10}$ ou encore $a \equiv 0 \pmod{10}$, c'est-à-dire $a = 0$.

- Si $5 \leq a < 9$

On a : $I = 8 \times (2a - 9) = 16a - 72$, $P = 7a$ et $c = a$.

Le numéro est correct si : $I + P + c \equiv 0 \pmod{10}$ ce qui équivaut à $24a - 72 \equiv 0 \pmod{10}$ ou encore $24a \equiv 72 \pmod{10} \iff 24a \equiv 2 \pmod{10}$ qui n'est vrai que si $a \equiv 8 \pmod{10}$, c'est-à-dire $a = 8$.

- Si $a = 9$

On a : $I = 8 \times 0 = 0$, $P = 7 \times 9 = 63$ et $c = 9$.

Le numéro n'est pas correct car $I + P + c = 72$ qui n'est pas un multiple de 10.

Il y a 2 numéros de cartes corrects : 0000 0000 0000 0000 et 8888 8888 8888 8888.

4. On effectue le test suivant : on intervertit deux chiffres consécutifs distincts dans un numéro de carte correct et on vérifie si le numéro obtenu reste correct.

On a trouvé une situation où ce n'est pas le cas, l'un des deux chiffres permutés valant 1.

Peut-on déterminer l'autre chiffre permuté?

Solution :

Notons a le chiffre voisin de 1 avec lequel l'échange se fait.

Gardons les mêmes notations que dans l'algorithme pour le numéro correct initial, et notons I' et P' les sommes obtenues pour le numéro obtenu après permutation.

Le numéro obtenu après permutation est correct si et seulement si : $I + P \equiv I' + P' \pmod{10}$.

- Si $0 \leq a < 5$; le chiffre que l'on permute avec le 1 doit être différent de 1 donc $a \neq 1$.
 - Si le chiffre 1 que l'on permute se trouve à un rang impair, le chiffre a est donc à un rang pair. On a donc : $P' - P = 1 - a$ et $I' - I = 2a - 2$. Ce qui implique : $I' + P' \equiv I + P + a - 1 \pmod{10}$ donc $I' + P' \equiv I + P \pmod{10} \iff a \equiv 1 \pmod{10}$ ce qui n'est pas possible.
 - Si le chiffre 1 que l'on permute se trouve à un rang pair, le chiffre a est donc à un rang impair. On a donc : $P' - P = a - 1$ et $I' - I = 2 - 2a$. Ce qui implique : $I' + P' \equiv I + P - a + 1 \pmod{10}$ donc $I' + P' \equiv I + P \pmod{10} \iff a \equiv 1 \pmod{10}$ ce qui n'est pas possible.

Après permutation, le numéro obtenu n'est pas correct.

- Si $5 \leq a < 9$

De la même façon, on a :

- Si le chiffre 1 que l'on permute se trouve à un rang impair, le chiffre a est donc à un rang pair.
On a donc : $P' - P = 1 - a$ et $I' - I = 2a - 9 - 2$. Ce qui implique :
 $I' + P' \equiv I + P + a - 10 \pmod{10}$ donc $I' + P' \equiv I + P \pmod{10} \iff a \equiv 0 \pmod{10}$ ce qui n'est pas possible.
- Si le chiffre 1 que l'on permute se trouve à un rang pair, le chiffre a est donc à un rang impair.
On a donc : $P' - P = a - 1$ et $I' - I = 2 - 9 - 2a$. Ce qui implique :
 $I' + P' \equiv I + P - a + 10 \pmod{10}$ donc $I' + P' \equiv I + P \pmod{10} \iff a \equiv 0 \pmod{10}$ ce qui n'est pas possible.

Après permutation, le numéro obtenu n'est pas correct.

- Si $a = 9$

- Si le chiffre 1 que l'on permute se trouve à un rang impair, le chiffre a est donc à un rang pair.
On a donc : $P' - P = 1 - 9$ et $I' - I = 0 - 2$. Ce qui implique :
 $I' + P' \equiv I + P - 10 \pmod{10}$ donc $I' + P' \equiv I + P \pmod{10}$.
- Si le chiffre 1 que l'on permute se trouve à un rang pair, le chiffre a est donc à un rang impair.
On a donc : $P' - P = 9 - 1$ et $I' - I = 2 - 0$. Ce qui implique :
 $I' + P' \equiv I + P + 10 \pmod{10}$ donc $I' + P' \equiv I + P \pmod{10}$.

Après permutation, le numéro obtenu est correct.

Comme le numéro obtenu après permutation est supposé ne pas être correct, on en déduit que le chiffre a ne doit être ni 1 ni 9.