

# Corrigé S Antilles-Guyane 19 juin 2018

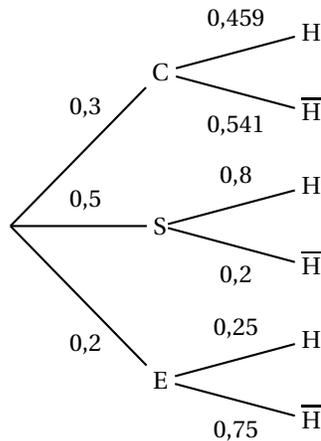
## EXERCICE 1

5 points

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

### Partie A

1. Arbre pondéré complet :



2. On a, d'après l'arbre pondéré :  $P(C \cap H) = 0,3 \times 0,459 = 0,1377$ .

3. Les événements C, S et E formant une partition de l'univers, la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} P(H) &= P(C \cap H) + P(S \cap H) + P(E \cap H) \\ &= 0,1377 + 0,5 \times 0,8 + 0,2 \times 0,25 \\ &= 0,5877 \end{aligned}$$

4. Il s'agit ici de calculer  $P_H(S)$ . Par définition :

$$\begin{aligned} p_H(S) &= \frac{P(S \cap H)}{P(H)} \\ &= \frac{0,5 \times 0,8}{0,5877} \\ &\approx 0,681 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.} \end{aligned}$$

### Partie B

1. D'après le cours, on sait que lorsque une variable aléatoire  $X$  suit la loi normale d'espérance  $\mu$  et d'écart-type  $\sigma$ , on a  $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0,954$ . Ici  $\mu = 4000$  et  $\sigma = 300$  donc

$$\begin{aligned} P(3400 \leq X \leq 4600) &= P(4000 - 2 \times 300 \leq X \leq 4000 + 2 \times 300) \\ &= 0,954 \end{aligned}$$

*Remarque* : on pouvait également calculer directement à la machine.

2. À l'aide de la calculatrice, à  $10^{-3}$  près :

$$P(X \geq 4500) \approx 0,048.$$

**Partie C**

En supposant que la parcelle comporte suffisamment d'arbres, on peut assimiler le comptage des sapins à un tirage avec remise.

La taille de l'échantillon est  $n = 200$ , la proportion supposée de sapins est  $p = 0,5$ .

On a :

- $n \geq 30$ ,
- $np = 100 \geq 5$ ,
- $n(1 - p) = 100 \geq 5$ .

Les conditions sont réunies pour utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %. En notant  $I$  cet intervalle, et en arrondissant les bornes à  $10^{-2}$  près :

$$I = \left[ p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = [0,43 ; 0,57].$$

La fréquence observée de sapins dans l'échantillon est  $f = \frac{106}{200} = 0,53$ .

$f \in I$ , donc **il n'y a pas lieu de remettre en cause l'affirmation de l'exploitant.**

**EXERCICE 2****5 points**

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

1.
  - Les plans (EFG) et (ABC) sont parallèles, car s'appuyant sur deux faces opposées du cube.
  - Le plan (BDL) coupe donc les plans (EFG) et (ABC) selon deux droites parallèles :
    - l'intersection du plan (BDL) et du plan (ABC) est la droite (BD) ;
    - l'intersection du plan (BDL) et du plan (EFG) est la droite (LM) ; en effet :
      - par définition  $M \in (EH)$ , or  $(EH) \subset (EFG)$  donc  $M \in (EFG)$  et, toujours par définition  $M \in (BDL)$  ;
      - $L \in (FE)$  or  $(FE) \subset (EFG)$  donc  $L \in (EFG)$  et il est évident que  $L \in (BDL)$ .

Les points L et M sont deux points distincts, appartenant chacun à la fois aux plans (BDL) et (EFG). L'intersection de ces deux plans est donc la droite (BL).  
Le théorème « de l'étagère » permet alors de conclure que **les droites (LM) et (BD) sont parallèles.**

2. On a  $F(6 ; 0 ; 6)$  et  $E(0 ; 0 ; 6)$ . En notant  $L(x ; y ; z)$ , l'égalité vectorielle  $\overrightarrow{FL} = \frac{2}{3} \overrightarrow{FE}$  équivaut à :

$$\begin{cases} x-6 = \frac{2}{3}(0-6) \\ y = \frac{2}{3}(0-0) \\ z-6 = \frac{2}{3}(6-6) \end{cases} \iff \begin{cases} x-6 = -4 \\ y = 0 \\ z-6 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 6 \end{cases}$$

ce qu'il fallait démontrer.

3. a. La droite (BL) passe par  $B(6 ; 0 ; 0)$  et a pour vecteur directeur  $\overrightarrow{BL}(-4 ; 0 ; 6)$ . Une représentation paramétrique de cette droite est donc :

$$\begin{cases} x = 6 - 4t \\ y = 0 \\ z = 6t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

- b. Le point S appartient à la droite (BL), il existe donc un réel  $t$  tel que  $S(6 - 4t ; 0 ; 6t)$ . De plus le point S appartient au plan (AJK) qui a pour équation  $x = 0$ , on a donc  $6 - 4t = 0 \iff t = \frac{3}{2} \iff 6t = 9$ . **Les coordonnées du point S sont donc bien égales à  $(0 ; 0 ; 9)$ .**

4. a. Le plan (BDL) a pour base  $(\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BL})$ .
- $\overrightarrow{BD}(-6; 6; 0)$  donc  $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 3 \times (-6) + 3 \times 6 + 2 \times 0 = 0$  et  $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{BD}$ ;
  - $\overrightarrow{BL}(-4; 0; 6)$  donc  $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{BL} = 3 \times (-4) + 3 \times 0 + 2 \times 6 = 0$  et  $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{BL}$ .
- Le vecteur  $\overrightarrow{n}$  est orthogonal à deux vecteurs formant une base du plan (BDL), il est donc normal à ce plan.
- b. Le vecteur  $\overrightarrow{n}(3; 3; 2)$  est normal au plan (BDL), une équation cartésienne de ce plan est donc  $3x + 3y + 2z + d = 0$ , où  $d$  est un réel à déterminer.  $B(6; 0; 0) \in (BDL)$  donc :

$$3 \times 6 + 3 \times 0 + 2 \times 0 + d = 0 \iff 18 + d = 0 \iff d = -18.$$

Une équation cartésienne du plan (BDL) est donc bien  $3x + 3y + 2z - 18 = 0$ .

- c.  $M \in (EH)$ , il existe donc un réel  $s$  tel que  $M(0; s; 6)$ . De plus  $M \in (BDL)$  donc :

$$3 \times 0 + 3 \times s + 2 \times 6 - 18 = 0 \iff 3s - 6 = 0 \iff s = 2.$$

Les coordonnées du point  $M$  sont donc  $(0; 2; 6)$ .

5. Prenons comme base du tétraèdre le triangle rectangle ELM et comme hauteur le segment [SE]. On a :
- $EL = 2$  et  $EM = 2$  donc le triangle rectangle ELM a pour aire  $\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$ ;
  - $ES = 3$ .

Le tétraèdre SELM a donc pour volume (en mètres cubes) :

$$V = \frac{1}{3} \times 2 \times 3 = 2.$$

6. Le triangle SEL est rectangle en E donc :  $\tan(\widehat{SLE}) = \frac{ES}{EL} = \frac{3}{2}$ . À l'aide de la calculatrice on obtient que  $\widehat{SLE} \approx 56,31^\circ$ . La contrainte est donc respectée.

### EXERCICE 3

5 POINTS

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

#### Partie A

1. Pour tout réel  $x$  on a  $-1 \leq \cos x \leq 1$  donc  $-1 \leq -\cos x \leq 1$ . On a également  $-1 \leq \sin x \leq 1$ , par conséquent :

$$-1 - 1 + 1 \leq -\cos x + \sin x + 1 \leq 1 + 1 + 1 \iff -1 \leq -\cos x + \sin x + 1 \leq 3.$$

En multipliant membre à membre le dernier encadrement par  $e^{-x}$  (qui est strictement positif) on obtient alors :

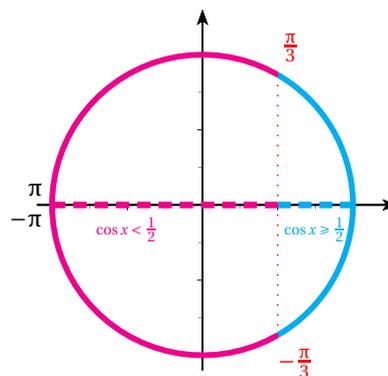
$$-e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}.$$

2. On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ . Comme  $-e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}$ , le théorème « des gendarmes » permet alors de conclure que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .
3. Par dérivation d'un produit :

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x}(-(-\sin x) + \cos x) + (-e^{-x})(-\cos x + \sin x + 1) \\ &= e^{-x}(\sin x + \cos x) + e^{-x}(\cos x - \sin x - 1) \\ &= e^{-x}(\sin x + \cos x + \cos x - \sin x - 1) \\ &= e^{-x}(2\cos x - 1). \end{aligned}$$

4. a.

Pour tout réel  $x$ ,  $e^{-x} > 0$  donc  $f'(x)$  est du même signe que  $2\cos x - 1$ . Sur l'intervalle  $[-\pi; \pi]$ , et en s'aidant d'un cercle trigonométrique :



$$\begin{aligned} 2\cos x - 1 \geq 0 &\iff \cos x \geq \frac{1}{2} \\ &\iff -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Par conséquent :

- sur  $[-\pi; -\frac{\pi}{3}[$ ,  $f'(x) < 0$ ;
- sur  $]-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}]$ ,  $f'(x) > 0$ ;
- sur  $]\frac{\pi}{3}; \pi]$ ,  $f'(x) < 0$ ;
- en  $-\frac{\pi}{3}$  et  $\frac{\pi}{3}$ ,  $f'(x) = 0$ .

5. On déduit de la question précédente que :

- sur  $[-\pi; -\frac{\pi}{3}[$ ,  $f$  est décroissante;
- sur  $]-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}]$ ,  $f$  est croissante;
- sur  $]\frac{\pi}{3}; \pi]$ ,  $f$  est décroissante.

## Partie B

1. Pour tout réel  $x$  :

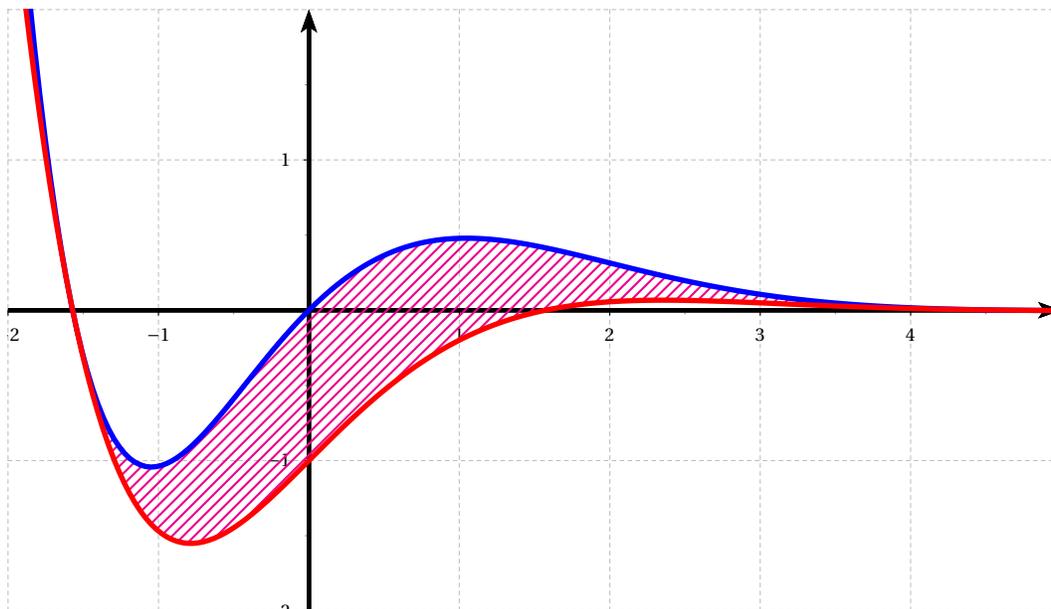
$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) - (-e^{-x})\cos x \\ &= e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1 + \cos x) \\ &= e^{-x}(\sin x + 1). \end{aligned}$$

Or, pour tout réel  $x$  :

- $e^{-x} > 0$ ,
- $-1 \leq \sin x \leq 1$  donc  $\sin x + 1 \geq 0$ .

On a donc, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) - g(x) \geq 0$ , ce qui signifie que la courbe  $\mathcal{C}_f$  est au dessus de la courbe  $\mathcal{C}_g$ .

2. a. Domaine  $\mathcal{D}$  hachuré :



3. Sur  $\mathbb{R}$ , a fortiori sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  la courbe  $\mathcal{C}_f$  est au dessus de la courbe  $\mathcal{C}_g$ , l'aire  $\mathcal{A}$  du domaine  $\mathcal{D}$  est donc donnée, en unités d'aire, par :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) - g(x) dx \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{-x}(\sin x + 1) dx \\
 &= \left[ H(x) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \\
 &= H\left(\frac{3\pi}{2}\right) - H\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\
 &= \left( -\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{2} - \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{2} - 1 \right) e^{-\frac{3\pi}{2}} - \left( -\frac{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2} - \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2} - 1 \right) e^{-\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \\
 &= -\frac{1}{2}e^{-\frac{3\pi}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}
 \end{aligned}$$

L'unité graphique est de 2 cm, l'unité d'aire est donc de 4 cm<sup>2</sup>. Par conséquent, une valeur approchée de l'aire du logo est, à 10<sup>-2</sup> près :

$$4 \times \left( -\frac{1}{2}e^{-\frac{3\pi}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}} \right) \approx 9,6 \text{ cm}^2.$$

#### EXERCICE 4

5 POINTS

CANDIDATS N'AYANT PAS SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

1. L'effectif de cétacés au 31 octobre 2017 est de 3000+80, c'est-à-dire 3080. Entre le 1<sup>er</sup> novembre et le 31 mai, une baisse de 5 % a lieu, l'effectif au 1<sup>er</sup> juin 2018 est donc :

$$u_1 = 3080 \times 0,95 = 2926.$$

2. En généralisant, on a, pour tout entier naturel  $n$  :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (u_n + 80) \times 0,95 \\ &= 0,95u_n + 80 \times 0,95 \\ &= 0,95u_n + 76. \end{aligned}$$

3. Formule à entrer dans la cellule C2 :  $= 0,95*B2 + 76$

4. a. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq 1520$ .

- **Initialisation.** On a  $u_0 = 3000 \geq 1520$ , la propriété est donc vraie pour  $n = 0$ .
- **Hérédité.** Supposons qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $u_n \geq 1520$ . Démontrons alors que  $u_{n+1} \geq 1520$ .

Par hypothèse de récurrence,  $u_n \geq 1520$ , donc, en multipliant membre à membre par 0,95 :

$$0,95u_n \geq 0,95 \times 1520$$

puis, en ajoutant membre à membre 76 :

$$0,95u_n + 76 \geq 0,95 \times 1520 + 76$$

ce qui équivaut à :

$$u_{n+1} \geq 1520$$

ce qu'il fallait démontrer. La propriété est donc héréditaire.

- **Conclusion.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_n \geq 1520$ .

b. Soit  $n \in \mathbb{N}$ , alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 0,95u_n + 76 - u_n \\ &= -0,05u_n + 76. \end{aligned}$$

D'après la question précédente,  $u_n \geq 1520$ , donc  $-0,05u_n \leq -0,05 \times 1520$ , c'est-à-dire  $-0,05u_n \leq -76$ , par conséquent,  $-0,05u_n + 76 \leq 0$ , c'est-à-dire  $u_{n+1} - u_n \leq 0$ , ce qui prouve que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

- c. La suite  $(u_n)$  est décroissante, minorée, elle est donc convergente.

5. a. Soit  $n \in \mathbb{N}$ , alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1520 \\ &= 0,95u_n + 76 - 1520 \\ &= 0,95u_n - 1444 \\ &= 0,95 \left( u_n - \frac{1444}{0,95} \right) \\ &= 0,95(u_n - 1520) \\ &= 0,95v_n. \end{aligned}$$

La suite  $(v_n)$  est donc géométrique de raison 0,95.

Son premier terme est  $v_0 = u_0 - 1520 = 1480$ .

- b. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $v_n = 1480 \times 0,95^n$ . Et comme  $v_n = u_n - 1520$ , on en déduit que  $u_n = v_n + 1520$ , ce qui donne bien

$$u_n = 1480 \times 0,95^n + 1520.$$

- c.  $-1 < 0,95 < 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,95^n = 0$ , on en déduit, par opérations sur les limites que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1520$ .

6. Algorithme complété :

```

n ← 0
u ← 3000
Tant que u ≥ 2000 :
    n ← n + 1
    u ← 0,95 * u + 76
Fin de Tant que

```

7. La limite de la suite  $(u_n)$  est 1 520 qui est inférieur à 2000, donc la réserve fermera un jour. Pour déterminer l'année de fermeture, on peut programmer l'algorithme précédent, ou résoudre l'inéquation :

$$\begin{aligned}
 u_n \leq 2000 & \iff 1480 \times 0,95^n + 1520 \leq 2000 \\
 & \iff 1480 \times 0,95^n \leq 480 \\
 & \iff 0,95^n \leq \frac{480}{1480} \\
 & \iff n \ln(0,95) \leq \ln\left(\frac{480}{1480}\right) \\
 & \iff n \geq \frac{\ln\left(\frac{480}{1480}\right)}{\ln(0,95)}
 \end{aligned}$$

À la calculatrice,  $\frac{\ln\left(\frac{480}{1480}\right)}{\ln(0,95)} \approx 21,95$ . C'est donc la 22<sup>e</sup> année que la réserve fermera, soit en 2039.

#### EXERCICE 4

5 POINTS

CANDIDATS AYANT SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

- Chaque année, 65 % des possesseurs de la carte de pêche libre achètent de nouveau une carte de pêche libre, et 45 % de possesseurs de la carte de pêche avec quota achètent une carte de pêche libre l'année suivante. En supposant qu'il n'y a ni départ ni arrivée de nouveaux pêcheurs, on a donc :

$$\ell_{n+1} = 0,65\ell_n + 0,45q_n.$$

- Le nombre de pêcheurs étant constant d'année en année :  $\ell_{n+1} + q_{n+1} = \ell_n + q_n$ , donc :

$$q_{n+1} = \ell_n + q_n - \ell_{n+1} = \ell_n + q_n - 0,65\ell_n - 0,45q_n = 0,35\ell_n + 0,55q_n.$$

- On a donc :

$$\begin{aligned}
 P_{n+1} &= \begin{pmatrix} \ell_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0,65\ell_n + 0,45q_n \\ 0,35\ell_n + 0,55q_n \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_n \\ q_n \end{pmatrix} \\
 &= MP_n
 \end{aligned}$$

2. 2019=2017+2, il s'agit donc de calculer  $P_2$  :

$$P_2 = MP_1 = MMP_0 = M^2P_0.$$

À l'aide de la calculatrice :

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0,56 \\ 0,44 \end{pmatrix}$$

En 2019, la proportion de pêcheurs achetant une carte de pêche avec quota est donc de 0,44.

3. Notons I la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

- $TQ = I$  et  $QT = I$ , la matrice Q est donc inversible et son inverse est la matrice T.
- $D = TMQ$  donc, en multipliant à gauche par Q et à droite par  $Q^{-1}$  :

$$QDQ^{-1} = QTMQQ^{-1} = (QT)M(QQ^{-1}) = IMI = M.$$

- Montrons maintenant par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $M^n = QD^nQ^{-1}$ .
  - **Initialisation.**  $M^1 = M = QDQ^{-1} = QD^1Q^{-1}$ . La propriété est donc vraie pour  $n = 1$ .
  - **Hérédité.** Supposons qu'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $M^n = QD^nQ^{-1}$ . Montrons alors que  $M^{n+1} = QD^{n+1}Q^{-1}$ .

On a

$$M^{n+1} = M^nM = QD^nQ^{-1} \times QDQ^{-1} = QD^n(Q^{-1}Q)DQ^{-1} = Q(D^nD)Q^{-1} = QD^{n+1}Q^{-1}.$$

La propriété est donc héréditaire.

— **Conclusion.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $M^n = QD^nQ^{-1}$ .

4. a. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_{n+1} = MP_n$ , la suite de matrices  $(P_n)$  est donc géométrique de raison M. Une récurrence immédiate prouve alors que  $P_n = M^nP_0$ .

b. Soit  $n \in \mathbb{N}$ , alors :

$$\begin{aligned} P_n &= M^nP_0 \\ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 9+7 \times 0,2^n & 9-9 \times 0,2^n \\ 7-7 \times 0,2^n & 7+9 \times 0,2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 3,6+2,8 \times 0,2^n+5,4-5,4 \times 0,2^n \\ 2,8-2,8 \times 0,2^n+4,2+5,4 \times 0,2^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 9-2,6 \times 0,2^n \\ 7+2,6 \times 0,2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comme  $P_n = \begin{pmatrix} \ell_n \\ q_n \end{pmatrix}$ , on en déduit que :

$$\begin{aligned} \ell_n &= \frac{1}{16} (9-2,6 \times 0,2^n) \\ &= \frac{9}{16} - \frac{1}{16} \times 2,6 \times 0,2^n \\ &= \frac{9}{16} - \frac{13}{80} \times 0,2^n \end{aligned}$$

5. • La suite  $(\ell_n)$  est croissante, en effet, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} \ell_{n+1} - \ell_n &= \left( \frac{9}{16} - \frac{13}{80} \times 0,2^{n+1} \right) - \left( \frac{9}{16} - \frac{13}{80} \times 0,2^n \right) \\ &= \frac{13}{80} (-0,2^{n+1} + 0,2^n) \\ &= \frac{13}{80} \times 0,2^n (-0,2 + 1) \\ &= \frac{13}{80} \times 0,2^n \times 0,8 \\ &> 0 \end{aligned}$$

- $-1 < 0,2 < 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,2^n = 0$ . On en déduit, par opérations sur les limites, que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n = \frac{9}{16}$ .
- La suite  $(\ell_n)$  est croissante, de limite  $\frac{9}{16}$ , donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq \frac{9}{16}$ . Or  $\frac{9}{16} < 0,6$ , on peut donc conclure que la proportion de pêcheurs achetant la carte de pêche libre ne dépassera jamais 60 %.