Corrigé du baccalauréat S – Asie 21 juin 2018

EXERCICE 1 — 5 points

Commun à tous les candidats

1. Cohérence du modèle

a. On a $f_p(0) = \dfrac{100p}{1-(1-p)} = \dfrac{100p}{p} = 100$.

On a bien une masse initiale de 100 tonnes.

b. On a successivement :

$0 < p < 1 \iff -p < 0 < 1-p$.

D'autre part la fonction $t \longmapsto \text{e}^{-pt}$ est strictement décroissante sur $[0~;~+\infty[$ de $\text{e}^0 = 1$ à 0.

Donc $\text{e}^0 \leqslant 1$ d'où en multipliant par le nombre positif $1-p$:

$(1-p)\text{e}^t \leqslant 1-p \iff 1-(1-p)\text{e}^t \geqslant p$.

c. Le résultat précédent $0 < p \leqslant 1-p \iff 1-(1-p)\text{e}^t$ donne en prenant les inverses :

$0 < \dfrac{1}{1-(1-p)\text{e}^t} < \dfrac{1}{p}$ d'où en multipliant par $100p$:

$0 < \dfrac{100p}{1-(1-p)\text{e}^t} < \dfrac{100p}{p}$ ou encore $0 < f_P(t) \leqslant 100$.

2. Cas particulier $p = 0{,}9$: $f_{0,9}(t) = \dfrac{90}{1-0{,}1\text{e}^{-0{,}9t}}$.

a. La fonction est de la forme $\dfrac{a}{u}$ avec $u = 1-0{,}1\text{e}^{-0{,}9t}$, de dérivée $-\dfrac{au'}{u^2}$, donc sur $[0~;~+\infty[$:

$f'_{0,9}(t) = -\dfrac{90\times 0{,}1\times 0{,}9\text{e}^{-0{,}9t}}{\left(1-0{,}1\text{e}^{-0{,}9t}\right)^2} = -\dfrac{8{,}1\text{e}^{-0{,}9t}}{\left(1-0{,}1\text{e}^{-0{,}9t}\right)^2}$.

$f'_{0,9}(t)$ opposée du quotient de deux termes positifs est négative, donc la fonction $f_{0,9}$ est décroissante sur $[0~;~+\infty[$

b. On a $f_{0,9}(0) = \dfrac{90}{1-0{,}1} = \dfrac{90}{0{,}9} = 100$ (vu à la question 1) et comme $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \text{e}^{-0{,}9t} = 0$,

$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} 0{,}1\text{e}^{-0{,}9t} = 0$, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} 1-0{,}1\text{e}^{-0{,}9t} = 1$ et finalement $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f_{0,9}(t) = 90$.

On a donc $90 \leqslant f_{0,9}(t) \leqslant 100$.

c. La masse des crevettes décroit de 100 tonnes à 90 tonnes.

3. Cas général $< p < 1$

On sait que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \text{e}^{-pt} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} (1-p)\text{e}^{-0{,}9t} = 0$, puis $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} 1-(1-p)\text{e}^{-0{,}9t} = 1$ et enfin $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f_p(t) = 100p$.

4. Cas particulier $p = \dfrac{1}{2}$

a. On a $f_{\frac{1}{2}}(t) = \dfrac{100\times\frac{1}{2}}{1-\left(1-\frac{1}{2}\right)\text{e}^{-\frac{t}{2}}} = \dfrac{50}{1-\frac{1}{2}\text{e}^{-\frac{t}{2}}} = \dfrac{100}{2-\text{e}^{-\frac{t}{2}}}$.

Soit H définie sur $[0~;~+\infty[$ par $H(t) = 100\ln\left(2-\text{e}^{-\frac{t}{2}}\right) + 50t$.

Cette fonction est dérivable sur $[0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :

$H'(t) = 100\dfrac{\frac{1}{2}\text{e}^{-\frac{t}{2}}}{2-\text{e}^{-\frac{t}{2}}} + 50 = \dfrac{50\text{e}^{-\frac{t}{2}}}{2-\text{e}^{-\frac{t}{2}}} + 50 = \dfrac{50\text{e}^{-\frac{t}{2}}+50\left(2-\text{e}^{-\frac{t}{2}}\right)}{2-\text{e}^{-\frac{t}{2}}} = \dfrac{100}{2-\text{e}^{-\frac{t}{2}}} = f_{\frac{1}{2}}(t)$.

La fonction h est donc une primitive de la fonction $f_{\frac{1}{2}}$ sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

b. Par définition la masse moyenne sur l'intervalle $[0\,;5]$ est égale à :

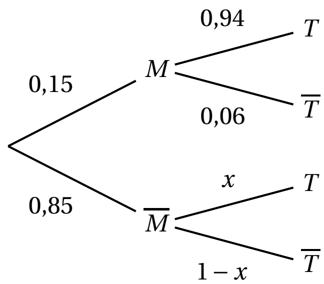
$m = \dfrac{1}{5-0}\displaystyle\int_0^5 f_{\frac{1}{2}}(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{5}[F(t)]_0^5 = \dfrac{H(5)-H(0)}{5} = \dfrac{100\ln\left(2-\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}}\right)+50\times 5-\left(100\ln\left(2-\mathrm{e}^{-\frac{0}{2}}\right)+50\times 0\right)}{5} =$
$20\ln\left(2-\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}}\right)+50 \approx 63{,}02$ soit 63 à la tonne près..

EXERCICE 2 — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit M l'évènement : « l'individu est malade » ;
T l'évènement « le test de l'individu est positif ».



1. $\left\{T\,;\,\overline{T}\right\}$ étant une partition de l'univers, la loi des probabilités totales permet d'écrire :
   $P(T) = p(T\cap M) + P\left(T\cap\overline{M}\right)$, soit
   $0{,}158 = 0{,}15\times 0{,}94 + 0{,}85x \iff 0{,}158 = 0{,}141 + 0{,}85x \iff 0{,}017 = 0{,}85x \iff x = \dfrac{0{,}017}{0{,}85} = 0{,}02$.
   On veut trouver la probabilité qu'un individu soit malade sachant que son test est positif, soit :
   $P_T(M) = \dfrac{P(T\cap M)}{P(T)} = \dfrac{0{,}141}{0{,}158} \approx 0{,}892$, soit 0,89 au centième : réponse C
2. La population est assez importante pour que l'on puisse avoir n épreuves indépendantes de Bernoulli avec comme paramètres n et $p = 0{,}158$.
   La probabilité que sur n personnes le test ne soit pas positif est $(1-0{,}158)^n = 0{,}842^n$ et par conséquent la probabilité qu'au moins un individu soit testé positivement est $1-0{,}842^n$.
   On veut que $1-0{,}842^n \geqslant 0{,}99 \iff 0{,}01 \geqslant 0{,}842^n \iff \ln(0{,}01) \geqslant n\ln(0{,}842) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}842)}$ (car $\ln(0{,}842) < 0$).
   Or $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}842)} \approx 26{,}7$.
   Il faut donc tester au moins 27 personnes : réponse B.
3. On sait que $P(2-3\sigma \leqslant X \leqslant 2+3\sigma) \approx 0{,}997$.
   On a donc $0{,}01 = 3\sigma \iff \sigma = \dfrac{0{,}01}{3} \approx 0{,}0033$: donc réponse C.

Partie B

1. Soit E la variable aléatoire donnant la durée d'efficacité après les 12 premiers mois.
   On sait que $P(E > 18-12) = 0{,}887$ ou $P(E > 6) = 0{,}887 \iff \mathrm{e}^{-6\lambda} = 0{,}887 \iff -6\lambda = \ln 0{,}887 \iff$
   $\lambda = -\dfrac{\ln 0{,}887}{6} \approx 0{,}019\,985$.

2. Les paramètres sont $p = 0{,}15$ et $n = 100\,000$.

Or $n \geqslant 30$ est vraie, $np = 0{,}15 \times 100\,000 = 15\,000 \geqslant 5$ est vraie et $n(1-p) = 100\,000 \times 0{,}85 = 85\,000 \geqslant 5$ est vraie.

On peut donc calculer un intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion de personnes touchées par la maladie :

$$\left[0{,}15 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}15 \times 0{,}85}{100\,000}}\ ;\ 0{,}15 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}15 \times 0{,}85}{100\,000}}\right] \approx [0{,}147\,78\ ;\ 0{,}152\,22]$$

Il faut que le stock soit au moins de 15 222 de boîtes de médicament.

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

1. On a $\text{AB}^2 = (3+3)^2 + 2^2 + 0^2 = 36$ et $\text{AD}^2 = 3^2 + 3 + 4 \times 4 = 36$.

On a donc $\text{AB} = \text{AD} = 6$.

2. **a.** Les coordonnées de H milieu de [CD] sont $\left(0\ ;\ 2\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{6}\right)$. Donc $\overrightarrow{\text{OH}}\left(0\ ;\ 2\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{6}\right)$.

$\overrightarrow{\text{OH}}$ étant normal au plan $\mathcal{P}$ celui-ci a une équation de la forme $0 \times x + 2y\sqrt{3} + z\sqrt{6} + d = 0$.

Le milieu de [BC] est $\text{I}\left(\frac{3}{2}\ ;\ \frac{3}{2}\sqrt{3}\ ;\ 0\right)$: ce point appartenant au plan $\mathcal{P}$ ses coordonnées vérifient l'équation précédente soit :

$2\sqrt{3} \times \frac{3}{2}\sqrt{3} + \sqrt{6} \times 0 + d = 0$, soit $9 + d = 0 \iff d = -9$.

Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est donc : $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \mathcal{P} \iff 2y\sqrt{3} + z\sqrt{6} - 9 = 0$.

b. [BD] a pour milieu $\text{J}\left(\frac{3}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{6}\right)$.

Or $\text{J} \in \mathcal{P} \iff 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2}\sqrt{3} + \sqrt{6} \times \sqrt{6} - 9 = 0 \iff 36 - 9 = 0$: cette égalité est vraie donc $\text{J} \in \mathcal{P}$.

J est donc le point d'intersection de la droite (BD) et du plan $\mathcal{P}$.

c. Équation paramétrique de la droite (AD) :

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{AD}) \iff \text{il existe } t \in \mathbf{R} \text{ tel que } \overrightarrow{\text{A}M} = t\overrightarrow{\text{AD}} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x-(-3) & = & 3t \\ y-0 & = & t\sqrt{3} \\ z-0 & = & 2t\sqrt{6} \end{array}\right.$$

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{AD}) \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3t-3 \\ y & = & t\sqrt{3} \\ z & = & 2t\sqrt{6} \end{array}\right.$$

Les points communs à la droite (AD) et au plan $\mathcal{P}$ ont leurs coordonnées qui vérifient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3t-3 \\ y & = & t\sqrt{3} \\ z & = & 2t\sqrt{6} \\ 2y\sqrt{3} + z\sqrt{6} - 9 & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow 2 \times t\sqrt{3} \times \sqrt{3} + 2t\sqrt{6} \times \sqrt{6} - 9 = 0 \iff$$

$6t + 12t - 9 = 0 \iff 18t = 9 \iff t = \frac{1}{2}$.

En remplaçant dans l'équation paramétrique de la droite (AD) on trouve que le point $\text{K}\left(-\frac{3}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \sqrt{6}\right)$ est le point commun à la droite (AD) et au plan $\mathcal{P}$.

d. On calcule les coordonnées des vecteurs :

$\overrightarrow{\text{IJ}}\left(0\ ;\ -\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{6}\right)$ et $\overrightarrow{\text{JK}}\,(-3\ ;\ 0\ ;\ 0)$.

Calculons le produit scalaire : $\overrightarrow{\text{IJ}} \cdot \overrightarrow{\text{JK}} = 0 + 0 + 0 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux, donc les droites (IJ) et (JK) sont perpendiculaires en J.

e. Soit L le milieu du segment [AC] de coordonnées $\left(-\frac{3}{2}\,;\,\frac{3}{2}\sqrt{3}\,;\,0\right)$.
Or $2\times\frac{3}{2}\sqrt{3}\times\sqrt{3}+0-9=0$, ce qui montre que L appartient au plan $\mathscr{P}$.
Le plan $\mathscr{P}$ coupe donc [BC] en I, [BD] en J, [AD] en K et [AC] en L, donc la section de ABCD par le plan $\mathscr{P}$ est le quadrilatère (IJKL).
Or dans le triangle (BCD), (IJ) // (CD) (droite des milieux) et CD = 2IJ = 3,
dans le triangle (ACD), (KL) // (CD) (droite des milieux) et CD = 2KL = 3,
dans le triangle (ABC), (IO) // (AC) (droite des milieux) et AC = 2IO = 3,
dans le triangle (BCD), (OK) // (AD) (droite des milieux) et AD = 2OK = 3, d'où il résulte que IJ = JK = KL = LI = 1,5, ce qui montre que le quadrilatère (IJKL) est un losange.
Or on a démontré à la question 2. d. que l'angle en J de ce losange est droit, donc (IJKL) est un carré.

3. À partir des coordonnées $\overrightarrow{\text{BD}}\left(-3\,;\,\sqrt{3}\,;\,2\sqrt{6}\right)$ on trouve qu'une écriture paramétrique de la droite (BD) est :
$\left\{\begin{array}{l c l} x &=& -3t+3\\ y &=& t\sqrt{3}\\ z &=& 2t\sqrt{6}\end{array}\right.$. On a donc :
$\overrightarrow{\text{O}M}\begin{pmatrix}-3t+3\\ t\sqrt{3}\\ 2t\sqrt{6}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{I}M}\begin{pmatrix}-3t+\frac{3}{2}\\ t\sqrt{3}-\frac{3}{2}\sqrt{3}\\ 2t\sqrt{6}\end{pmatrix}$.
D'où on déduit : $\overrightarrow{\text{O}M}\cdot\overrightarrow{\text{I}M}=(-3t+3)\left(-3t+\frac{3}{2}\right)+t\sqrt{3}\left(t\sqrt{3}-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)+2t\sqrt{6}\times2t\sqrt{6}=$
$9t^2-\frac{9t}{2}-9t+\frac{9}{2}+3t^2-\frac{9}{2}t+24t^2=36t^2-18t+\frac{9}{2}$.
Le triangle OMI est rectangle en M si les vecteurs $\overrightarrow{\text{O}M}$ et $\overrightarrow{\text{I}M}$ sont orthogonaux, donc si leur produit scalaire est nul, donc si le trinôme du second degré est nul, or
$\Delta=18^2-4\times36\times\frac{9}{2}=464-18\times36=-324$.
Ce trinôme n'a pas de racines réelles : il n'existe pas de position du point M tel que le triangle OIM soit rectangle en M.

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. On calcule $|\text{OC}|^2=y^2+1$; $|\text{OA}|^2=1^2+1^2=2$; $|\text{OB}|^2=x^2+1$.
Si OC = OA × OB, alors $\text{OC}^2=\text{OA}^2\times\text{OB}^2$, soit :
$y^2+1=2\left(x^2+1\right)\iff y^2+1=2x^2+2\iff y^2=2x^2+1$.

2.

```
Pour x allant de 1 à 10 faire
    Pour y allant de 1 à 10 faire
        Si y² = 2x² + 1
            Afficher x et y
        Fin Si
    Fin Pour
Fin Pour
```

3. On a $x=2$ et $y=3$.

a. $z_{\text{A}}=1+\text{i}$, donc $||^2=1+1=2$, d'où $|z_{\text{A}}|=\sqrt{2}$.
Donc $z_{\text{A}}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\text{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}++\text{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Donc un argument de z_{A} est $\frac{\pi}{4}$.

b. On a OC $= \sqrt{3^2+1} = \sqrt{10}$.
OA $= \sqrt{2}$ et OB $= |x+\text{i}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.
On a bien OC = OA × OB.

c. On a $z_{\text{B}} z_{\text{C}} = (x+\text{i})(y+\text{i}) = (2\text{i})(3+\text{i}) = 6+5\text{i}-1 = 5+5\text{i}$.
$5z_{\text{A}} = 5(1+\text{i}) = 5+5\text{i}$.
Donc $z_{\text{B}} z_{\text{C}} = 5z_{\text{A}}$.
On en déduit en prenant les arguments que $\arg(5z_{\text{A}}) = \arg(z_{\text{A}}) =$
$\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{OA}}\right) = \left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{OB}}\right) + \left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{OC}}\right)$.

4. **a.** $\arg\left(\dfrac{(x+\text{i})(y+\text{i}}{1+\text{i}}\right) = \arg((x+\text{i})(y+\text{i})) - \arg(1+\text{i}) = \arg(x+\text{i}) + \arg(y+\text{i} - \arg(1+\text{i}) = \arg z_{\text{B}} +$
$\arg z_{\text{C}} - \arg z_{\text{A}} = \left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{OB}}\right) + \left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{OC}}\right) - \left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{OA}}\right) = 0$ à 2π près, d'après le résultat de la question précédente.

b. On a vu que si OC = OA × OB, alors $y^2 = 2x^2+1$ et donc $y = \sqrt{2x^2+1}$ puisque y est positif.

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Dans le triangle rectangle, on applique le théorème de Pythagore : $a^2 = 1^2 + 1^2 = 2$.
En appliquant le théorème dans les deux autres triangles rectangles on peut écrire :
$b^2 = 1^2 + u^2 = 1 + u^2$ et $c^2 = 1^2 + v^2 = 1 + v^2$.
a, b et c sont 3 longueurs donc sont des nombres positifs donc $ab = c \iff a^2b^2 = c^2$; ainsi $2(1+u^2) = 1+v^2$ c'est-à-dire $2+2u^2 = 1+v^2$ donc $v^2 - 2u^2 = 1$.
Les solutions du problème sont donc les solutions $(u\,;\,v)$ de l'équation (E) : $v^2 - 2u^2 = 1$ où u et v sont des entiers naturels non nuls.

2. Algorithme :

Pour u allant de 1 à 1000 faire
    Pour v allant de 1 à 1000
        Si $v^2 - 2u^2 = 1$
            Afficher u et v
        Fin Si
    Fin Pour
Fin Pour
	Au cours de son exécution,
	l'algorithme affiche :
	2 3
	12 17
	70 99
	408 577

3. **a.** Supposons que le couple (u,v) est une solution de l'équation (E) et que $u \geqslant v$.
On a alors : $u^2 \geqslant v^2$ et comme $2u^2 \geqslant u^2$, on a $2u^2 \geqslant v^2$ ce qui implique $v^2 - 2u^2 \leqslant 0$.
C'est impossible car $v^2 - 2u^2 = 1$.
Conclusion : $u < v$.

b. On suppose que n est pair. Il existe alors un entier naturel k tel que $n = 2k$.
On a alors $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Ainsi n^2 est pair.
On suppose que n est impair. Il existe alors une entier naturel q tel que $n = 2q+1$.
Alors $n^2 = (q+1)2 = 4q^2 + 4q + 1 = 2(2q^2+2q) + 1$. Ainsi n^2 est impair.
Conclusion : n et n^2 ont la même parité.

c. Soit un couple solution (u,v) du problème. On a :
$v^2 - 2u^2 = 1 \iff v^2 = 2u^2 + 1$.
Ainsi v^2 est impair. D'après la question précédente v est aussi impair.

d. On a : $v^2 - 2u^2 = 1 \iff 2u^2 = v^2 - 1 \iff 2u^2 = (v-1)(v+1)$.
Or v est impair donc $v-1$ et $v+1$ sont pairs : il existe ainsi un entier naturel k tel que $v - 1 = 2k$ et $v + 1 = 2(k+1)$.
Alors $2u^2 = 2k \times 2(k+1) \iff u^2 = 2k(k+1)$.
u^2 est donc pair. D'après la question **3.b.**, u est donc pair.

4. **a.** Soit $X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ une solution de l'équation (E).

$AX = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u+2v \\ 4u+3v \end{pmatrix}$.

On a : $(4u+3v)^2 - 2(3u+2v)^2 = 16u^2 + 24uv + 9v^2 - 18u^2 - 24uv - 8v^2 = v^2 - 2u^2 = 1$.
Ainsi AX est aussi solution de (E).

b. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, A^nX est une solution de l'équation (E).

— Initialisation : $n = 0$.
$A^0X = I_2X = X$. Et X est solution de (E). L'affirmation est donc vraie pour $n = 0$.

— Soit $n \geqslant 0$ quelconque tel que A^nX est une solution de (E).
$A^{n+1}X = A \times A^nX$ est une solution de (E) d'après la question précédente.

— Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$. D'après le raisonnement par récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a donc démontré que, si X est une solution de (E), alors, pour tout entier naturel n, A^nX est aussi une solution de (E).

c. On a : $3^2 - 2 \times 2^2 = 9 - 8 = 1$ donc le couple $(2;3)$ est solution de (E).

$A^5 \times X = \begin{pmatrix} 13\,860 \\ 19\,601 \end{pmatrix}$.

Donc le couple $(13\,860 ~;~ 19\,601)$ est une solution de (E) telle que $v > 10\,000$.