Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S Liban 29 mai 2018

Exercice 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Les quinze jours précédant la rentrée universitaire, le standard téléphonique d'une mutuelle étudiante enregistre un nombre record d'appels.
Les appelants sont d'abord mis en attente et entendent une musique d'ambiance et un message préenregistré.
Lors de cette première phase, le temps d'attente, exprimé en secondes, est modélisé par la variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,02\ \text{s}^{-1}$.
Les appelants sont ensuite mis en relation avec un chargé de clientèle qui répond à leurs questions.
Le temps d'échange, exprimé en secondes, lors de cette deuxième phase est modélisé par la variable aléatoire Y, exprimée en secondes, qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 96$ s et d'écart-type $\sigma = 26$ s.

1. • La durée moyenne d'attente est $\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0,02} = \boxed{50}$ s.
   • La durée moyenne de temps d'échange est $\mu = \boxed{96}$ s.
   • La durée totale moyenne d'un appel au standard téléphonique est donc $50 + 96 = 146$ s, soit $\boxed{\text{2 min 26 s}}$.
2. Un étudiant est choisi au hasard parmi les appelants du standard téléphonique.
   a. $P(X \geqslant 120) = 1 - P(X \leqslant 120) = 1 - \int_0^{120} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1 - \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^{120} = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-120\lambda}\right) = \mathrm{e}^{-120\lambda}$
   $= \mathrm{e}^{-2,4} \approx 0,09$ donc $\boxed{P(X \geqslant 120) \approx 0,09}$.
   b. $P(Y \leqslant 90) = P(Y \leqslant 96) - P(90 \leqslant Y \leqslant 96) = 0,5 - P(90 \leqslant Y \leqslant 96) \approx 0,408$; $\boxed{p(Y \leqslant 90) \approx 0,408}$.
3. Une étudiante, choisie au hasard parmi les appelants, attend depuis plus d'une minute d'être mise en relation avec le service clientèle. Lasse, elle raccroche et recompose le numéro. Elle espère attendre moins de trente secondes cette fois-ci.
   Le fait de raccrocher puis de rappeler augmente-t-il ses chances de limiter à 30 secondes l'attente supplémentaire ou bien aurait-elle mieux fait de rester en ligne ?
   On sait qu'une loi exponentielle est une loi à durée de vie sans vieillissement, donc
   $P_{(X \geqslant 60)}(X \leqslant 60 + 30) = P(X \leqslant 30)$ donc cela ne change rienb de raccrocher et de rappeler.

EXERCICE 2 **3 points**

Commun à tous les candidats

1. • $|1 + \mathrm{i}| = \sqrt{2}$; $1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \boxed{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$.
   • $1 - \mathrm{i} = \overline{1 + \mathrm{i}} = \overline{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} = \boxed{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$
2. Pour tout entier naturel n, on pose

$$S_n = (1 + \mathrm{i})^n + (1 - \mathrm{i})^n.$$

   a. $S_n = (1 + \mathrm{i})^n + (1 - \mathrm{i})^n = \left[\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right]^n + \left[\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right]^n = \sqrt{2}^n\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{4}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\frac{\pi}{4}}\right) = \sqrt{2}^n \times 2\cos\left(n\dfrac{\pi}{4}\right)$
   $= 2\sqrt{2}^n \cos\left(n\dfrac{\pi}{4}\right)$.
   Posons $Z = (1 + \mathrm{i})^n$ alors $\overline{Z} = \overline{(1 + \mathrm{i})^n} = \left(\overline{1 + \mathrm{i}}\right)^n = (1 - \mathrm{i})^n$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = Z + \overline{Z} = 2\text{Re}(Z)$
$\forall n \in \mathbb{N}$, $Z = \left(\sqrt{2}\exp\text{i}\frac{\pi}{4}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\exp\text{i}\frac{n\pi}{4}\right) = \sqrt{2^n}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \text{i}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = 2\sqrt{2^n}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$
Il faut alors étudier les différentes valeurs de n
pour tout entier naturel k :
✓ si $n = 8k$ ($k \in \mathbb{N}$) alors $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \cos(2k\pi) = 1$
✓ si $n = 8k+1$ ou $n = 8k+7$ alors $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
✓ pour $n = 8k$ ou $n = 8k+1$ ou $n = 8k+7$ alors S_n est un réel strictement positif donc $S_n = 2\sqrt{2^n}(\cos(0) + \text{i}\sin(0))$

b. *Pour chacune des deux affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte et l'absence de réponse n'est pas pénalisée.*

Affirmation A : Pour tout entier naturel n, le nombre complexe S_n est un nombre réel.
VRAIE : $S_n = 2\sqrt{2}\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$ est réel.

Affirmation B : **VRAIE** : $S_n = 0 \iff \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) = 0 \iff n\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}$.
On en déduit : $\frac{n}{4} = \frac{1}{2} + k \iff \frac{n-2}{4} = k \iff n = 4k+2$.
On en déduit que $S_{4k+2} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc il y a bien une infinité de valeurs pour lesquelles $S_n = 0$.

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

L'objectif de cet exercice est d'étudier les trajectoires de deux sous-marins en phase de plongée.
On considère que ces sous-marins se déplacent en ligne droite, chacun à vitesse constante.
À chaque instant t, exprimé en minutes, le premier sous-marin est repéré par le point $S_1(t)$ et le second sous-marin est repéré par le point $S_2(t)$ dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$ dont l'unité est le mètre.
Le plan défini par $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ représente la surface de la mer. La cote z est nulle au niveau de la mer, négative sous l'eau.

1. On admet que, pour tout réel $t \geqslant 0$, le point $S_1(t)$ a pour coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x(t) & = & 140 - 60t \\ y(t) & = & 105 - 90t \\ z(t) & = & -170 - 30t \end{array}\right.$$

a. Pour $t = 0$, on a : $\left\{\begin{array}{lr} x(0) = & 140 \\ y(0) = & 105 \\ z(0) = & -170 \end{array}\right.$ donc les coordonnées du sous-marin au début de l'observation sont $\boxed{A(140\,;\,105\,;\,-170)}$.

b. Le vecteur vitesse est $\overrightarrow{v(t)}\left(x'(t) = -60\,;\,y'(t) = -90\,;\,z'(t) = -30\right)$, donc la vitesse est $\left|\left|\overrightarrow{v(t)}\right|\right| = \sqrt{(-60)^2 + (-90)^2 + (-30)^2} = \sqrt{12\,600} = \boxed{30\sqrt{14} \approx 112,25\text{ m.min}^{-1}}$.

c. On se place dans le plan vertical contenant la trajectoire du premier sous-marin.
Appelons B le point atteint par le sous-marin au bout d'une minute : $B(80\,;\,15\,;\,-200)$.

D'après la définition de la vitesse, celle-ci $30\sqrt{14}$ est égale à la distance AB.

Soit C le point tel que $\overrightarrow{AB}$ soit dans un plan perpendiculaire au plan horizontal; C a donc la même abscisse et la même ordonnée que B, mais la cote de A : C(80 ; 15 ; −170).

On a donc dans le triangle rectangle ABC : $\sin\widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{30}{30\sqrt{14}} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}$.

La calculatrice donne au dixième près : $\alpha \approx 15,5$degres.

2. Au début de l'observation, le second sous-marin est situé au point $S_2(0)$ de coordonnées (68 ; 135 ; −68) et atteint au bout de trois minutes le point $S_2(3)$ de coordonnées (−202 ; −405 ; −248) avec une vitesse constante.

Les coordonnées de S_2 sont $\left\{\begin{array}{l} x_2(t) = x_2(0) + at \\ y_2(t) = y_2(0) + bt \\ z_2(t) = z_2(0) + ct \end{array}\right.$ où $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ sont les coordonnées (constantes) du vecteur vitesse.

Au bout de trois minutes, on a : $\left\{\begin{array}{l} x_2(3) = x_2(0) + 3a = 68 + 3a = -202 \\ y_2(3) = y_2(0) + 3b = 135 + 3b = -405 \\ z_2(3) = z_2(0) + 3c = -68 + 3c = -248 \end{array}\right.$.

On en déduit : $\left\{\begin{array}{l} a = -90 \\ b = -180 \\ c = -60 \end{array}\right.$ donc $S_2(t) \left\{\begin{array}{l} x_2(t) = 69 - 90t \\ y_2(t) = 135 - 180t \\ z_2(t) = 68 - 60t \end{array}\right.$.

Les deux sous-marins ont à la même profondeur si $z_1(t) = z_2(t)$ donc si $-170 - 30t = -68 - 60t \iff 30t = 102 \iff \boxed{t = 3,4 \text{ min}}$

EXERCICE 4 **5 points**

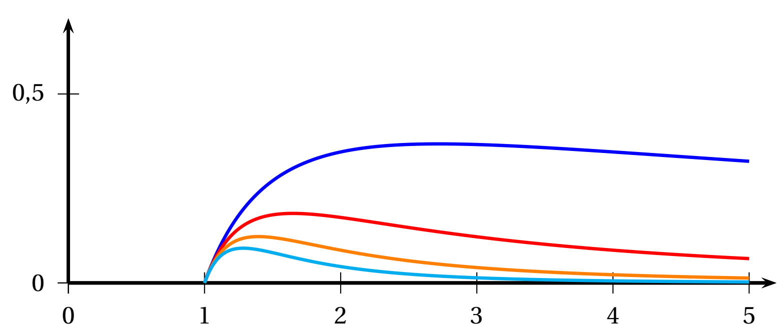
Commun à tous les candidats

On considère, pour tout entier $n > 0$, les fonctions f_n définies sur l'intervalle [1 ; 5J par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}.$$

. Pour tout entier $n > 0$, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes $\mathscr{C}_n$ pour n appartenant à {1 ; 2 ; 3 ; 4}.



1. $f_n = \dfrac{u}{v_n}$ avec $\left\{\begin{array}{l} u(x) = \ln x \\ v_n(x) = x^n \end{array}\right.$.

$f' = \left(\dfrac{u}{v_n}\right)' = \dfrac{u'v_n - uv_n'}{v_n^2}$ avec $\left\{\begin{array}{l} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v_n'(x) = nx^{n-1} \end{array}\right.$.

Alors : $f_n'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x} \times x^n - nx^{n_1} \ln x}{x^{2n}} = \dfrac{x^{n-1}(1 - n\ln x)}{x^{2n}} = \dfrac{1 - n\ln x}{x^{2n-(n-1)}} = \boxed{\dfrac{1-n\ln x}{x^{n+1}}}$.

2. Pour tout entier $n > 0$, on admet que la fonction f_n admet un maximum sur l'intervalle $[1 ; 5]$.
On note A_n le point de la courbe $\mathcal{C}_n$ ayant pour ordonnée ce maximum.
L'abscisse x_n de A_n est la valeur pour laquelle $f_n'(x)$ s'annule, donc
$1 - n\ln x_n = 0 \iff x_n = \text{e}^{\frac{1}{n}} \in [1 ; 5]$.
L'ordonnée de A_n est alors $y_n = f_n(x_n) = \dfrac{\ln\left(\text{e}^{\frac{1}{n}}\right)}{\left(\text{e}^{\frac{1}{n}}\right)^n} = \dfrac{\frac{1}{n}}{\text{e}^1} = \dfrac{1}{\text{e}} \times \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{\text{e}} \times \ln\left(\text{e}^{\frac{1}{n}}\right) = \dfrac{1}{\text{e}} \ln(x_n)$.
Les points A_n appartiennent donc à la courbe Γ d'équation $y = \dfrac{1}{\text{e}} \ln x$.

3. **a.** Quel que soit x appartenant à l'intervalle $[1 ; 5]$, $0 \leqslant \ln x \leqslant \ln(5)$ car la fonction ln est croissante ; en divisant par x^n positif, on trouve

$$0 \leqslant \frac{\ln x}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}.$$

b. $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\text{d}x = \left[-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\right]_1^5 = \frac{1}{n-1}\left[-\frac{1}{5^{n-1}} - (-1)\right) = \boxed{\frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)}$.

c. L'aire cherchée est $\mathcal{A}_n = \displaystyle\int_1^5 f_n(x)\,\text{d}x = \int_1^5 \frac{\ln x}{x^n}\,\text{d}x$.

On sait que $0 \leqslant \dfrac{\ln x}{x^n} \leqslant \dfrac{\ln 5}{x^n}$ donc par conservation de l'ordre,
$\displaystyle\int_1^5 0\,\text{d}x \leqslant \int_1^5 \frac{\ln x}{x^n}\,\text{d}x \leqslant \int_1^5 \frac{\ln 5}{x^n} = \ln 5 \int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\text{d}x = \frac{\ln 5}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)$.
$5 > 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 5^{n-1} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5^{n-1}}\right) = 0$.
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln 5}{n-1} = 0$.
Par produit : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathcal{A}_n = 0}$.

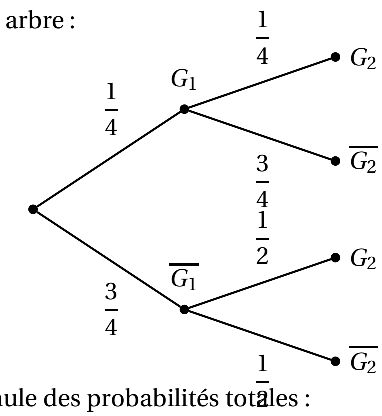
EXERCICE 5 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un jeu de hasard sur ordinateur est paramétré de la façon suivante :

- Si le joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est $\dfrac{1}{4}$;
- Si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est $\dfrac{1}{2}$;
- La probabilité de gagner la première partie est $\dfrac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'évènement « la n^{e} partie est gagnée » et on note p_n la probabilité de cet évènement. On a donc $p_1 = \dfrac{1}{4}$.

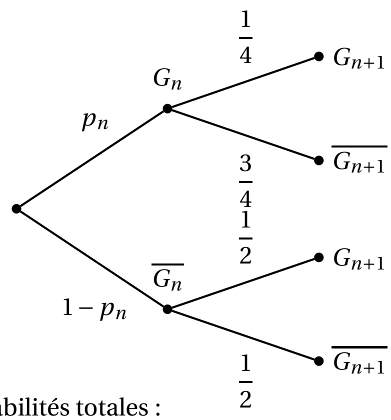
1. Illustrons la situation par un arbre :



Alors : En appliquant la formule des probabilités totales :

$p_2 = p\left(G_2\right) = p_{G_1}\left(G_2\right)p\left(G_1\right)) + p_{\overline{G_1}}\left(G_2\right)p\left(G_1\right) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4} = \frac{1}{16}+\frac{3}{8} = \frac{7}{16}$ donc $\boxed{p_2 = \frac{7}{16}}$

2. Arbre :



D'après la formule des probabilités totales :

$p_{n+1} = p\left(G_{n+1}\right) = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}\left(1-p_n\right) = -\frac{1}{4}p_n+\frac{1}{2}$

Donc :

$$\boxed{p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n+\frac{1}{2}}$$

3. On obtient ainsi les premières valeurs de p_n :

n	1	2	3	4	5	6	7
p_n	0,25	0,437 5	0,390 6	0,402 3	0,399 4	0,400 1	0,399 9

On peut conjecturer que la suite converge vers 0,4.

4. On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) par $u_n = p_n - \frac{2}{5}$.

a. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n_{n+1} = p_{n+1}-\frac{2}{5} = -\frac{1}{4}p_n+\frac{1}{2}-\frac{2}{5} = -\frac{1}{4}p_n+\frac{1}{20} = -\frac{1}{4}\left(p_n-\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{4}u_n$

donc $\boxed{u_{n+1} = -\frac{1}{4}u_n}$.

La suite (u_n) est donc géométrique, de raison $q = -\frac{1}{4}$.

b. $u_1 = p_1 - \frac{2}{5} = \frac{1}{4}-\frac{2}{5} = -\frac{3}{20}$.

Comme la suite (u_n) est géométrique, on a, pour tout n, $u_n = u_1q^{n-1} = -\frac{3}{20}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

On en déduit : $p_n = u_n+\frac{2}{5} = \frac{2}{5}-\frac{3}{20}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

c. $-1 < -\dfrac{1}{4} < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$ donc la conjecture faite à partir du tableau est validée.

EXERCICE 5 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On définit la suite de réels (a_n) par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_0 & = & 0 \\ a_1 & = & 1 \\ a_{n+1} & = & a_n + a_{n-1} \text{ pour } n \geqslant 1. \end{array}\right.$$

On appelle cette suite la suite de Fibonacci.

1. Voilà l'algorithme complété :

```
A ← 0
B ← 1
Pour i allant de 1 à n :
    C ← A + B
    A ← B
    B ← C
Fin Pour
```

On obtient ainsi les premières valeurs de la suite a_n :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$.

Calculer $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+1 & 1+0\\1+0 & 1+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$

$A^3 = A \times A^2 = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+1 & 1+1\\2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$

$A^4 = A \times A^3 = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3 & 2\\2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+2 & 2+1\\3 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 3\\3 & 2\end{pmatrix}$

$A^5 = A^4 \times A = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}5 & 3\\3 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5+3 & 5\\3 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8 & 5\\3 & 2\end{pmatrix}$

3. On peut démontrer, et nous admettrons, que pour tout entier naturel n non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix}a_{n+1} & a_n\\a_n & a_{n-1}\end{pmatrix}.$$

a. Soient p et q deux entiers naturels non nuls.

$A^p \times A^q = \begin{pmatrix}a_{p+1} & a_p\\a_p & a_{p-1}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}a_{q+1} & a_q\\a_q & a_{q-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{p+1}\times a_{q+1} + a_p \times a_q & a_{p+1} - \times a_q + a_p \times a_{q-1}\\a_p \times a_{q+1} + a_{p-1}\times a_q & a_p \times a_q + a_{p-1}\times a_q\end{pmatrix}$.

Or : $A^p \times A^q = \begin{pmatrix}a_{p+q+1} & a_{p+q}\\\boxed{a_{p+q}} & a_{p+q-1}\end{pmatrix}$

b. Si r divise a_p et a_q, r divise $a_p \times a_{q+1}$ et $a_{p-1} \times a_q$ donc leurs somme qui est a_{p+q}, donc r divise a_{p+q}.

c. Soit p un entier naturel non nul.

Démontrons, en utilisant un raisonnement par récurrence sur n, que pour tout entier naturel n non nul, a_p divise a_{np}.

- Initialisation : pour $n = 1$, il est évident que a_p divise $a_{1\times p} = a_p$.
- Hérédité : on suppose que pour n entier naturel non nul, a_n divise a_{np}.
  D'après la question précédente, a_n divise a_n et a_{np} donc a_{n+np}, c'est-à-dire $a_{(n+1)p}$

La propriété est donc héréditaire.

La propriété est vraie au rang 1 et si elle est vraie à un rang au moins égal à 1, elle l'est au tang suivant. D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

4. **a.** Soit n un entier supérieur ou égal à 5. On suppose que n n'est pas premier. Il existe p et q supérieurs strictement à 1 tels que $n = pq$.

Comme $n \geqslant 5$, l'un au moins des deux nombres p ou q est supérieur à 2.

Supposons que ce soit p, donc $2 < p < n$.

D'après la question 3. c, a_p divise $a_{pq} = a_n$ avec $1 = a_2 < a_p < a_n$, la suite (a_n) étant strictement croissante à partir du rang 2, donc, comme $a_p > 1$, a_n n'est pas premier.

b. On peut calculer $a_{19} = 4\,181 = 37 \times 113$.

$a_{19} = 37 \times 113$ donc n'est pas premier ; or $n = 19$ est premier, donc la réciproque de la propriété obtenue dans la question 4 a. est fausse.

a_n non premier n'entraîne pas que n soit premier.