

Corrigé du baccalauréat S Pondichéry 4 mai 2018

EXERCICE 1

6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. **Solution :** On cherche T_4 .

On applique l'algorithme pour $n = 4$ à l'aide de la calculatrice on trouve
 $T_4 \approx 463$ °C

2. **Solution :**

Initialisation : pour $n = 0$

$$T_0 = 1000 \text{ et } 980 \times 0,82^0 + 20 = 1000.$$

Hérédité : Soit n un entier naturel tel que $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$ alors

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= 0,82T_n + 3,6 \\ &= 0,82 \times (980 \times 0,82^n + 20) + 3,6 \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= 980 \times 0,82^{n+1} + 16,4 + 3,6 \\ &= 980 \times 0,82^{n+1} + 20 \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 0$ or elle est vérifiée à ce rang 0 donc par le principe de récurrence on vient de montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n = 980 \times 0,82^n + 20.$$

3. **Solution :**

On cherche le plus petit entier naturel n tel que $T_n \leq 70$.

On peut utiliser la calculatrice pour trouver $T_{14} \approx 80,9 > 70$ et $T_{15} \approx 69,9 < 70$, donc il faut attendre au minimum 15 heures avant de pouvoir ouvrir le four sans dommage.

On peut aussi résoudre l'inéquation :

$$\begin{aligned} T_n \leq 70 &\Leftrightarrow 980 \times 0,82^n + 20 \leq 70 \Leftrightarrow 0,82^n \leq \frac{5}{98} \Leftrightarrow n \ln(0,82) \leq \ln\left(\frac{5}{98}\right) \Leftrightarrow \\ n &\geq \frac{\ln\left(\frac{5}{98}\right)}{\ln(0,82)} \text{ car } \ln(0,82) < 0 \text{ et on a } \frac{\ln\left(\frac{5}{98}\right)}{\ln(0,82)} \approx 14,99 \end{aligned}$$

Partie B

1. **Solution :** $f(0) = 1000 \Leftrightarrow a + b = 1000$

$$\text{de plus } f'(0) + \frac{1}{5}f(0) = 4 \Leftrightarrow f'(0) = -196$$

f est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = -\frac{1}{5}ae^{-\frac{t}{5}}$ d'où $f'(0) = -196 \Leftrightarrow \frac{1}{5}a = 196$

$$\text{On a donc } \begin{cases} a + b = 1000 \\ \frac{1}{5}a = 196 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 20 \\ a = 980 \end{cases}$$

Finalement on a $\forall t \in [0; +\infty[, f(t) = 980e^{-\frac{t}{5}} + 20$

2.

$$f(t) = 980e^{-\frac{t}{5}} + 20.$$

a. **Solution :** $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{t}{5}\right) = -\infty$, donc en posant $T = -\frac{t}{5}$, $\lim_{T \rightarrow -\infty} e^T = 0$ et par opération sur les limites on obtient $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 20$.

b. **Solution :**

D'après la question 1, $\forall t \in [0; +\infty[$, $f'(t) = -196e^{-\frac{t}{5}}$, d'où $f'(t) < 0$.
On en déduit que f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$

t	0	$+\infty$
$f'(t)$		-
$f(t)$	1000	20

c. **Solution :** On cherche à résoudre l'équation $f(t) = 70$

Sur $[0; +\infty[$, f est continue et strictement décroissante à valeurs dans $]20; 1000]$, or $70 \in]20; 1000]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 70$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$

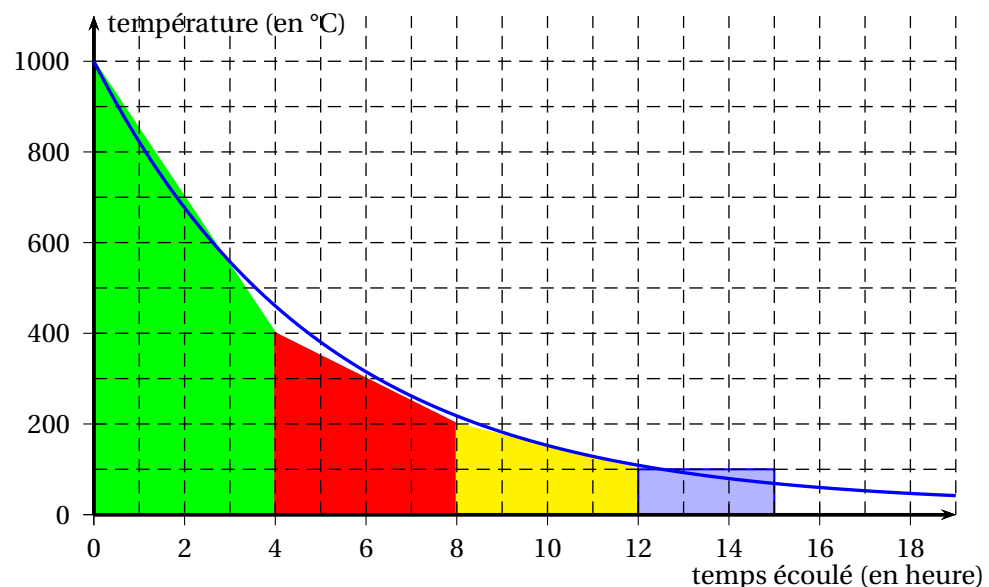
Par dichotomie on trouve $\alpha \approx 14,9$ et comme f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, on en déduit que $f(t) \leq 70 \iff t \geq \alpha$.

D'après ce modèle on peut donc ouvrir le four après environ 15 heures de refroidissement.

Remarque : on peut aussi résoudre l'inéquation :

$$f(t) \leq 70 \iff 980e^{-\frac{t}{5}} + 20 \leq 70 \iff 980e^{-\frac{t}{5}} \leq 50 \iff e^{-\frac{t}{5}} \leq \frac{5}{98} \iff -\frac{t}{5} \leq \ln\left(\frac{5}{98}\right) \text{ (par croissance de la fonction logarithme népérien)} \iff \frac{t}{5} \geq -\ln\left(\frac{5}{98}\right) \iff t \geq -5\ln\left(\frac{5}{98}\right) \approx 14,877 \text{ soit en minutes au moins } 893 \text{ min.}$$

3. a.



Solution : Sur $[0 ; 15]$ l'aire entre la courbe \mathcal{C}_f et l'axe des abscisses peut-être approchée par la somme des aires des quatre trapèzes ci-dessus et on a alors

$$\int_0^{15} f(t) dt \approx 2800 + 1200 + 600 + 300 = 4900 \text{ et donc la température moyenne est } \theta \approx \frac{4900}{15} \approx 327 \text{ }^\circ\text{C}$$

Remarque : cette question laisse place à toute méthode d'approche de l'aire (par des rectangles, par des trapèzes...) et donc les résultats attendus peuvent être très divers. Ici le choix a été fait d'approcher l'aire par des trapèzes.

b. Solution :

$$\int_0^{15} f(t) dt = \int_0^{15} (980e^{-\frac{t}{5}} + 20) dt = \left[-4900e^{-\frac{t}{5}} + 20t \right]_0^{15} = (-4900e^{-3} + 300) - (-4900) = 4900(1 - e^{-3}) + 300$$

$$\text{d'où } \theta = \frac{1}{15} \int_0^{15} f(t) dt = \frac{980}{3}(1 - e^{-3}) + 20 \approx 330,4 \text{ }^\circ\text{C}.$$

4. a. Solution :

$$d(t) = f(t) - f(t+1) = (980e^{-\frac{t}{5}} + 20) - (980e^{-\frac{t+1}{5}} + 20) = 980(e^{-\frac{t}{5}} - e^{-\frac{t+1}{5}})$$

On a donc bien $\forall t \in [0 ; +\infty[$, $d(t) = 980(1 - e^{-\frac{1}{5}})e^{-\frac{t}{5}}$

b. Solution : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{t}{5}\right) = -\infty$; on pose $T = -\frac{t}{5}$ or $\lim_{T \rightarrow -\infty} e^T = 0$ donc par opération sur les limites on obtient $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(t) = 0$.

On peut donc en conclure que la température finira par se stabiliser et comme on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 20$, on en déduit que la température se stabilisera avec le temps à $20 \text{ }^\circ\text{C}$

EXERCICE 2

4 points

Commun à tous les candidats

Les points A, B et C ont pour affixes respectives $a = -4$, $b = 2$ et $c = 4$.

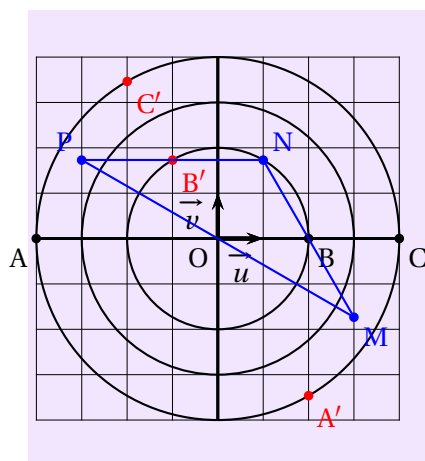
1. a. Solution : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

$$a' = aj = -4j = 2 - 2i\sqrt{3} = 4\left(-e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = 4\left(e^{i\pi}e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = 4e^{i\left(\pi + \frac{2\pi}{3}\right)} = 4e^{\frac{5i\pi}{3}} = 4e^{-\frac{i\pi}{3}}$$

$$b' = bj = 2j = -1 + i\sqrt{3} = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

$$c' = cj = 4j = -2 + 2i\sqrt{3} = 4e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

b. Solution :



$|a'| = 4$ donc A' est sur le cercle de centre O et de rayon 4 et on a $Re(a') = 2$ et $Im(a') < 0$, on peut donc placer A' .

$|b'| = 2$ donc B' est sur le cercle de centre O et de rayon 2 et on a $Re(b') = -1$ et $Im(b') > 0$, on peut donc placer B' .

$|c'| = 4$ donc C' est sur le cercle de centre O et de rayon 4 et on a $Re(c') = -2$ et $Im(c') > 0$, on peut donc placer C' .

2. Solution :

$a' = -c'$ donc A' et C' sont symétriques par rapport à O alors O, A' et C' sont alignés

$\arg(b') = \arg(c') = \frac{2\pi}{3} (2\pi)$ donc $\overrightarrow{OB'}$ et $\overrightarrow{OC'}$ sont colinéaires d'où O, B' et C' sont alignés

Finalement O, A', B' et C' sont alignés.

3. Solution :

$$z_M = \frac{a' + c}{2} = 3 - i\sqrt{3}, \quad z_N = \frac{c' + c}{2} = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_P = \frac{c' + a}{2} = -3 + i\sqrt{3}$$

MNP semble isocèle en N d'après le dessin

$$MN = |z_N - z_M| = |2 - 2i\sqrt{3}| = 4 \text{ et } PN = |z_N - z_P| = |4| = 4.$$

On a $MN = NP$ donc MNP est bien isocèle en N.

EXERCICE 3

5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. a. **Solution :**

$X_U \hookrightarrow \mathcal{N}(0,58 ; 0,21^2)$ et X_U désigne la taille du cristal donc $X_U \geq 0$:

$P(X_U < 0,2) = P(0 \leq X_U < 0,2) \approx 0,032$ et $P(0,5 \leq X_U < 0,8) \approx 0,501$.

- b. **Solution :** $P(0 \leq X_U < 0,2) \approx 0,032$ signifie que la probabilité qu'un cristal se retrouve dans le récipient à fond étanche est de 0,032 environ; donc pour 1 800 g de sucre on peut estimer que $1\,800 \times 0,032 = 58$ g se retrouvent dans le récipient à fond étanche.

$P(0,5 \leq X_U < 0,8) \approx 0,501$ signifie que la probabilité qu'un cristal se retrouve dans le tamis 2 est de 0,501 environ, donc pour 1 800 g de sucre on peut estimer que $1\,800 \times 0,501 = 901,8$ g se retrouvent dans le tamis 2.

2. **Solution :** On sait que si $X_V \hookrightarrow \mathcal{N}(0,65 ; \sigma_V^2)$ alors $Z = \frac{X_V - 0,65}{\sigma_V} \hookrightarrow \mathcal{N}(0 ; 1^2)$.

On a ici $P(0,5 \leq X_V < 0,8) = 0,4$.

$$0,5 \leq X_V < 0,8 \iff -\frac{0,15}{\sigma_V} \leq Z < \frac{0,15}{\sigma_V}.$$

On a donc $P\left(-\frac{0,15}{\sigma_V} \leq Z < \frac{0,15}{\sigma_V}\right) = 0,4$ avec $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0 ; 1^2)$.

À l'aide de la calculatrice on trouve $\frac{0,15}{\sigma_V} \approx 0,524$ d'où $\sigma_V \approx 0,286$.

Partie B

1. a. **Solution :** L'énoncé donne $P_U(E) = 0,03$, $P_V(E) = 0,05$, $P(U) = 0,3$ et

$$P(V) = 0,7$$

On cherche $P(E)$

U et V forment une partition de l'univers, donc d'après les probabilités totales on a

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \cap U) + P(E \cap V) \\ &= P(U) \times P_U(E) + P(V) \times P_V(E) \\ &= 0,009 + 0,035 = 0,044. \end{aligned}$$

- b. **Solution :** On cherche $P_E(U)$

$$P_E(U) = \frac{P(E \cap U)}{P(E)} = \frac{0,009}{0,044} = \frac{9}{44} \approx 0,205.$$

2. **Solution :** on veut $P_E(U) = 0,3$

$$P_E(U) = \frac{P(E \cap U)}{P(E)} = 0,3 \iff \frac{P(U) \times P_U(E)}{P(U) \times P_U(E) + P(V) \times P_V(E)} = 0,3$$

$$\iff \frac{0,03P(U)}{0,03P(U) + 0,05P(V)} = 0,3$$

$$\iff 0,03P(U) = 0,009P(U) + 0,015P(V)$$

$$\iff 0,021P(U) = 0,015P(V)$$

$$\iff P(U) = \frac{5}{7}P(V)$$

or $P(V) = 1 - P(U)$ donc on a $P(U) = \frac{5}{7}(1 - P(U)) \iff \frac{12}{7}P(U) = \frac{5}{7} \iff$

$$P(U) = \frac{5}{12} \approx 0,417.$$

Si l'entreprise veut atteindre son objectif, elle doit donc acheter environ 41,7% de son sucre à l'exploitation U et 58,3% à V.

Partie C

1. **Solution :** Ici on répète $n = 150$ fois de manière indépendante le prélèvement d'un paquet.

La proportion annoncée de paquets provenant de l'exploitation U est $p = 0,3$.

On a $n \geq 30$, $np = 45 \geq 5$ et $n(1 - p) = 105 \geq 5$.

On peut donc bâtir l'intervalle de fluctuation asymptotique.

On peut affirmer au seuil de 95 % que la fréquence observée de paquets de sucre provenant de l'exploitation U devrait appartenir à l'intervalle

$$I_n = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right].$$

$$p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,227 \text{ et } p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,373.$$

La fréquence observée est $f = \frac{30}{150} = 0,2$ et on constate que $f \notin I_n$.

On peut donc rejeter l'affirmation au seuil de 95 %.

2. **Solution :** l'échantillon est de taille $n = 150$, la fréquence observée de paquets provenant de l'exploitation U est $f = 0,42$

On a $n \geq 30$, $nf = 63 \geq 5$ et $n(1 - f) = 87 \geq 5$.

On peut donc bâtir l'intervalle de confiance.

On peut affirmer avec une confiance à 95 % que la proportion p de paquets de sucre provenant de l'exploitation U devrait appartenir à l'intervalle

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]. f - \frac{1}{\sqrt{n}} \approx 0,3384 \text{ et } f + \frac{1}{\sqrt{n}} \approx 0,5016$$

Un intervalle de confiance, au niveau de confiance 95 % est donc environ

$$I = [0,338 ; 0,502].$$

EXERCICE 4

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).

Solution : $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ donc $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (CD), et (CD) passe par C(0 ; 3 ; 2).

On obtient une représentation paramétrique de (CD) :
$$\begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = 2 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

2. Soit M un point de la droite (CD).

- a. Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.

Solution : B(4 ; -1 ; 0). Soit t le paramètre associé à M alors M(t ; 3 ; 2 - t).

Alors $BM^2 = (t - 4)^2 + (4)^2 + (2 - t)^2 = 2t^2 - 12t + 36 = 2(t^2 - 6t + 18)$.

BM est minimale quand BM^2 l'est c'est-à-dire quand $t^2 - 6t + 18$ est minimal.

On sait que tout polynôme de la forme $at^2 + bt + c$ avec $a > 0$ admet un

minimum en $t = -\frac{b}{2a}$

ici BM sera donc minimale pour $t = 3$ soit pour M(3 ; 3 ; -1)

- b. **Solution :** $\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

On en déduit que (BH) et (CD) sont perpendiculaires.

- c. **Solution :** D'après ce qui précède, on a (BH) est la hauteur issue de B dans BCD.

On a alors $\mathcal{A}_{BCD} = \frac{1}{2} \times CD \times BH = \frac{1}{2} \times \sqrt{32} \times \sqrt{18} = \frac{\sqrt{596}}{2} = 12$ (en u. a.).

L'aire de BCD est donc bien de 12 cm².

3. a. **Solution :**

$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ ne sont évidemment pas colinéaires donc B, C et D

définissent bien un plan.

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = -8 + 4 + 4 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{CD} = 8 + 0 - 8 = 0$

\vec{n} est donc bien normal au plan (BCD) car orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

- b. **Solution :**

$\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est normal au plan (BCD) donc (BCD) : $2x + y + 2z + d = 0$

$C(0 ; 3 ; 2)$ appartient à (BCD) donc $2x_C + y_C + 2z_C + d = 0$ ce qui donne $d = -7$

Finalement (BCD) : $2x + y + 2z - 7 = 0$.

- c. **Solution :** Δ est orthogonale au plan (BCD) donc elle admet \vec{n} pour vecteur directeur, on a alors

$$\Delta : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 4 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

- d. **Solution :** I est un point de (BCD) donc $2x_I + y_I + 2z_I - 7 = 0$

De plus $I \in \Delta$ donc il existe un réel t tel que

$$2(2 + 2t) + (1 + t) + 2(4 + 2t) - 7 = 0 \iff 9t = -6 \iff t = -\frac{2}{3}$$

On en déduit $I\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

Remarque : on pouvait aussi simplement vérifier que les coordonnées proposées correspondaient à un point de Δ et à un point de (BCD).

Solution : Δ est perpendiculaire au plan (BCD) en I et passe par A, on en déduit que AI est la hauteur du tétraèdre ABCD de base BCD.

$$AI = \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2} = 2$$

$$\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{3} \times AI \times \mathcal{A}_{BCD} = 8 \text{ (en cm}^3\text{)}.$$

Le volume du tétraèdre est 8 cm^3 .

EXERCICE 4

5points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Cryptage

4. **Solution :**

Dans l'alphabet la lettre « N » est associée à $x = 13$ alors $x(x + B) = 13 \times 26 = 338 = 33 \times 10 + 8 \equiv 8 [33]$

Bob code la lettre « N » avec le nombre $y = 8$.

2. **Solution :**

Dans l'alphabet la lettre « O » est associée à $x = 14$ alors $x(x + B) = 14 \times 27 = 378 = 33 \times 11 + 15 \equiv 15 [33]$.

Bob code la lettre « O » avec le nombre $y = 15$.

Partie B : Décryptage

1. **Solution :** Soit x un entier tel que $x(x + 13) \equiv 3 [33] \iff x^2 + 13x \equiv 3 [33]$

$$\iff x^2 + 13x + 33x \equiv 3 [33] \quad \text{car} \quad 33x \equiv 0 [33]$$

$$\iff x^2 + 46x + 529 \equiv 3 + 1 [33] \quad \text{car} \quad 529 = 16 \times 33 + 1 \equiv 1 [33]$$

$$\iff (x + 23)^2 \equiv 4 [33].$$

2. a. **Solution :**

Soit x un entier tel que $(x + 23)^2 \equiv 4 [33]$ alors il existe un entier k tel que $(x + 23)^2 = 33k + 4$.

$$\text{Alors } (x + 23)^2 = 33k + 4 = 3 \times 11k + 4 \equiv 4 [3]$$

$$(x + 23)^2 = 33k + 4 = 11 \times 3k + 4 \equiv 4 [11]$$

finalement si $(x + 23)^2 \equiv 4 [33]$ alors le système d'équations

$$\begin{cases} (x + 23)^2 \equiv 4 [3] \\ (x + 23)^2 \equiv 4 [11] \end{cases} \quad \text{est vérifié.}$$

b. **Solution :** si $(x + 23)^2 \equiv 4 [11]$ et $(x + 23)^2 \equiv 4 [33]$, alors il existe un entier k' tel que $(x + 23)^2 = 11k' + 4$

$$\text{Or } (x + 23)^2 \equiv 4 [3]. \text{ On a alors } 11k' + 4 \equiv 4 [3] \text{ ou encore } 11k' \equiv 0 [3].$$

Donc 3 divise $11k'$ or 3 et 11 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, on en déduit que 3 divise k' .

Il existe donc un entier r tel que $k' = 3r$.

$$\text{Alors } (x + 23)^2 = 11k' + 4 = 33r + 4 \equiv 4 [33], \text{ d'où } (x + 23)^2 \equiv 4 [33]$$

$$\text{Finalement si } \begin{cases} (x + 23)^2 \equiv 4 [3] \\ (x + 23)^2 \equiv 4 [11] \end{cases} \quad \text{alors } (x + 23)^2 \equiv 4 [33].$$

Remarque :

Plus rapide : 3 et 11 divisent $(x + 23)^2 - 4$. Or 3 et 11 sont premiers entre eux donc leur produit $3 \times 11 = 33$ divise $(x + 23)^2 - 4$, d'où $(x + 23)^2 \equiv 4 [33]$.

c. **Solution :** $(x + 23)^2 \equiv 4 \pmod{3} \iff (x + 23)^2 \equiv 1 \pmod{3}$ car $4 \equiv 1 \pmod{3}$.

Dans la question a. on a montré que $x(x + 13) \equiv 3 \pmod{33} \implies$

$$\begin{cases} (x + 23)^2 \equiv 1 \pmod{3} \\ (x + 23)^2 \equiv 4 \pmod{11} \end{cases}$$

Dans la question b. on a montré ainsi que

$$\begin{cases} (x + 23)^2 \equiv 1 \pmod{3} \\ (x + 23)^2 \equiv 4 \pmod{11} \end{cases} \implies$$

$$x(x + 13) \equiv 3 \pmod{33}$$

$$\text{On a donc bien } x(x + 13) \equiv 3 \pmod{33} \iff \begin{cases} (x + 23)^2 \equiv 1 \pmod{3} \\ (x + 23)^2 \equiv 4 \pmod{11} \end{cases}$$

3. a. **Solution :**

a	0	1	2
a^2	0	1	4
modulo 3, a^2 est congru à	0	1	1

Les entiers naturels a tels que $0 \leq a < 3$ et $a^2 \equiv 1 \pmod{3}$ sont 1 et 2.

b. **Solution :**

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
modulo 11, b^2 est congru à	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1

Les entiers naturels b tels que $0 \leq b < 11$ et $b^2 \equiv 4 \pmod{11}$ sont 2 et 9.

4. a. **Solution :**

$$\text{On sait que } x(x + 13) \equiv 3 \pmod{33} \iff \begin{cases} (x + 23)^2 \equiv 1 \pmod{3} \\ (x + 23)^2 \equiv 4 \pmod{11} \end{cases}$$

D'après ce qui précède on a

$$(x + 23)^2 \equiv 1 \pmod{3} \iff \begin{cases} x + 23 \equiv 1 \pmod{3} \\ \text{ou} \\ x + 23 \equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv -22 \pmod{3} \\ \text{ou} \\ x \equiv -21 \pmod{3} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ \text{ou} \\ x \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

$$(x + 23)^2 \equiv 4 \pmod{11} \iff \begin{cases} x + 23 \equiv 2 \pmod{11} \\ \text{ou} \\ x + 23 \equiv 9 \pmod{11} \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv -21 \pmod{11} \\ \text{ou} \\ x \equiv -14 \pmod{11} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{11} \\ \text{ou} \\ x \equiv 8 \pmod{11} \end{cases}$$

$x(x + 13) \equiv 3 \pmod{33} \iff \begin{cases} (x + 23)^2 \equiv 1 \pmod{3} \\ (x + 23)^2 \equiv 4 \pmod{11} \end{cases}$ est donc équivalent aux quatre systèmes donnés.

b. **Solution :** Avec x entier et $0 \leq x < 33$

$$\begin{cases} x \equiv 2 [3] \\ x \equiv 8 [11] \end{cases} \iff x = 8$$

$$\begin{cases} x \equiv 0 [3] \\ x \equiv 1 [11] \end{cases} \iff x = 12$$

$$\begin{cases} x \equiv 2 [3] \\ x \equiv 1 [11] \end{cases} \iff x = 23 \quad , \quad \begin{cases} x \equiv 0 [3] \\ x \equiv 8 [11] \end{cases} \iff x = 30$$

5. **Solution :**

Pour x allant de 0 à 32 Si le reste de la division de $x(x+13)$ par 33 est égal à 3 alors Afficher x Fin Si Fin Pour

6. **Solution :** La première lettre du message de Bob a été codée par 3, d'après ce qui précède cela signifie que cette première lettre peut être I (pour $x = 8$), M ($x = 12$) ou X ($x = 23$).

Il est donc impossible pour Alice d'utiliser le « chiffre de RABIN » pour décoder un message lettre par lettre.