Corrigé du baccalauréat S Antilles-Guyane 18 juin 2019

EXERCICE 1 **6 points**

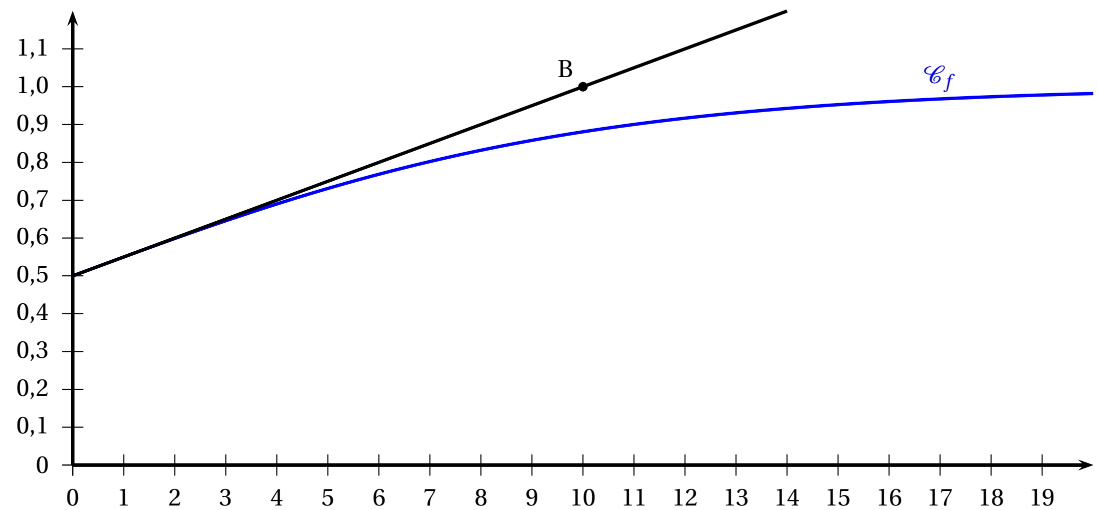
COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

Partie A

Soit a et b des nombres réels. On considère une fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{a}{1+\mathrm{e}^{-bx}}.$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.
La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point A(0 ; 0,5). La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A passe par le point B(10 ; 1).



1. Justifier que $a = 1$.

La courbe de f passe par $A(0\,;\,0.5)$ donc en calculant $f(0) = \dfrac{a}{1+\mathrm{e}^{-b\times 0}} = \dfrac{a}{2}$ et sachant que ce nombre vaut $0,5$, on obtient $a = 1$.

On obtient alors, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-bx}}.$$

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$

$$f'(x) = \frac{b\mathrm{e}^{-bx}}{\left(1+\mathrm{e}^{-bx}\right)^2}.$$

f est de la forme $\dfrac{1}{v}$ donc a pour dérivée $-\dfrac{v'}{v^2}$, avec $v(x) = 1 + e^{-bx}$ et $v'(x) = -be^{-bx}$. On obtient ainsi le résultat voulu en appliquant la formule de dérivation précédente.

3. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer b.

La droite (AB) est la tangente en $A(0\,;\,0,5)$. Elle a pour coefficient directeur m égal à la dérivée de f en 0, à savoir $m = f'(0) = \dfrac{b}{4}$.

Par ailleurs, le coefficient directeur de cette droite peut se calculer par la formule $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1-0,5}{10-0} = 0,05$.

Ainsi, $\dfrac{b}{4} = 0,05 \iff b = 4 \times 0,05 = 0,2$. Finalement $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2x}}$.

Partie B

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$p(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2x}}.$$

Le réel x représente le temps écoulé, en année, depuis le 1er janvier 2000.
Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années.
Ainsi, pour ce modèle, $p(0)$ est la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2000 et $p(3,5)$ est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2003.

1. Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010 ? On en donnera une valeur arrondie au centième.
Cette proportion est $p(10) = \dfrac{1}{1+e^{-2}} \approx 0,88$.

2. **a.** Déterminer le sens de variation de la fonction p sur $[0\,;\,+\infty[$.
D'après la partie A, p est dérivable et sa dérivée est, en prenant $b = 0,2$,

$$p'(x) = \frac{0,2\mathrm{e}^{-0,2x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-0,2x}\right)^2}$$

Pour tout réel x positif, on a $0,2\mathrm{e}^{-0,2x} > 0$ donc $p'(x) > 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$. Ainsi, p est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

b. Calculer la limite de la fonction p en $+\infty$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\mathrm{e}^{-0,2x} = 1$ par propriété de l'exponentielle et composée de fonctions. Ainsi, on a, par quotient de limites

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = 1$$

c. Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
Dans le contexte de l'énoncé, plus les années x s'écoulent, plus la proportion $p(x)$ de personnes équipées augmentera jusqu'à atteindre les 100%. Ceci se traduit par la limite de la question précédente.

3. On considère que, lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 95 %, le marché est saturé.
Déterminer, en expliquant la démarche, l'année au cours de laquelle cela se produit.
On cherche en quelle année x la proportion $p(x)$ dépassera les 95%. Il suffit de trouver le plus petit entier x satisfaisant $p(x) > 0,95$. Or, on a

$$\begin{aligned}
p(x) > 0,95 &\iff \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2x}} > 0,95 \\
&\iff 0,95(1+\mathrm{e}^{-0,2x}) < 1 \\
&\iff 0,95\mathrm{e}^{-0,2x} < 0,05 \\
&\iff \mathrm{e}^{-0,2x} < \frac{0,05}{0,95} \\
&\iff \mathrm{e}^{-0,2x} < \frac{5}{95} \\
&\iff \mathrm{e}^{-0,2x} < \frac{1}{19} \\
&\iff -0,2x < \ln\frac{1}{19} && \text{la fonction ln est strictement croissante} \\
&\iff -0,2x < -\ln(19) \\
&\iff x > \frac{\ln(19)}{0,2} \approx 14,7 && \text{on divise par } -0,2 < 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, la saturation se produira au cours de l'année $x = 15$, donc en 2015.

Remarque : on pourrait procéder par « tâtonnements », et voir que ça marche à partir de $x = 15$, mais il faut tout de même l'expliquer par l'inéquation $p(x) > 0,95$.

4. On définit la proportion moyenne d'individus équipés entre 2008 et 2010 par

$$m = \frac{1}{2}\int_8^{10} p(x)\,\mathrm{d}x.$$

a. Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$p(x) = \frac{\mathrm{e}^{0,2x}}{1+\mathrm{e}^{0,2x}}.$$

En multipliant $p(x)$ par $1 = \dfrac{e^{0,2x}}{e^{0,2x}}$, on a

$$p(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2x}} \times 1 = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2x}} \times \frac{\mathrm{e}^{0,2x}}{\mathrm{e}^{0,2x}} = \frac{\mathrm{e}^{0,2x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-0,2x}\right)\mathrm{e}^{0,2x}} = \frac{\mathrm{e}^{0,2x}}{1+\mathrm{e}^{0,2x}}$$

b. En déduire une primitive de la fonction p sur $[0\,;\,+\infty[$.

$$p(x) = \frac{\mathrm{e}^{0,2x}}{1+\mathrm{e}^{0,2x}} = \frac{\left(\frac{1}{0,2}\times 0,2\right)\times\mathrm{e}^{0,2x}}{1+\mathrm{e}^{0,2x}} = \frac{1}{0,2}\times\frac{0,2\mathrm{e}^{0,2x}}{1+\mathrm{e}^{0,2x}} = 5\times\frac{0,2\mathrm{e}^{0,2x}}{1+\mathrm{e}^{0,2x}}$$

est donc de la forme $\alpha\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = 1+\mathrm{e}^{0,2x} > 0$ et $\alpha = \dfrac{1}{0,2} = 5$, donc une primitive de p est donnée par la fonction

$$P(x) = 5\times\ln(1+\mathrm{e}^{0,2x}).$$

c. Déterminer la valeur exacte de m et son arrondi au centième.

$$m = \frac{1}{2}\int_8^{10} p(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[P(x)\Big]_8^{10} = \frac{1}{2}\times 5\times\left(\ln(1+\mathrm{e}^2) - \ln(1+\mathrm{e}^{1,6})\right) = \frac{5}{2}\ln\left(\frac{1+e^2}{1+e^{1,6}}\right) \approx 0,86.$$

Exercice 2 — 5 points

Commun à tous les candidats

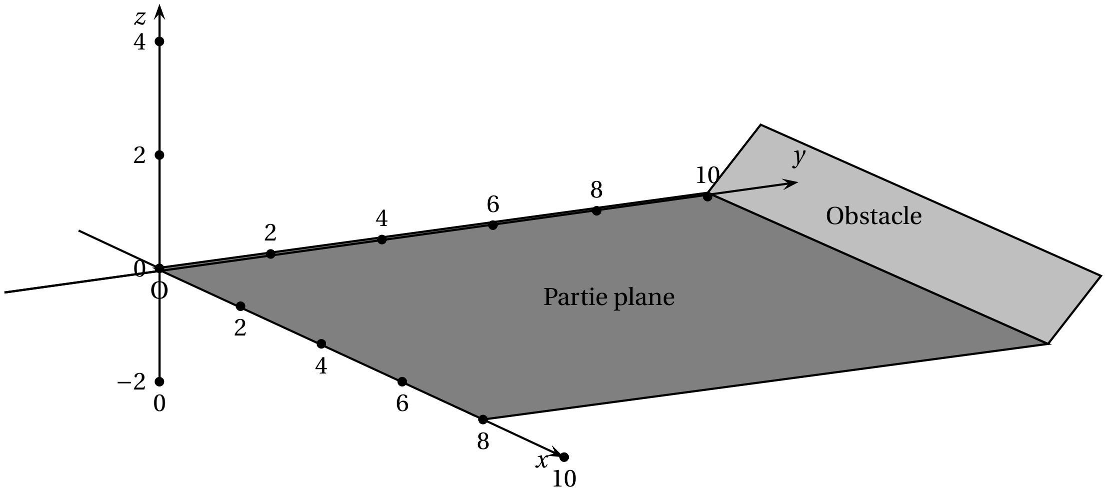
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Alex et Élisa, deux pilotes de drones, s'entraînent sur un terrain constitué d'une partie plane qui est bordée par un obstacle.

On considère un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$, une unité correspondant à dix mètres. Pour modéliser le relief de la zone, on définit six points O, P, Q, T, U et V par leurs coordonnées dans ce repère :

$$\mathrm{O}(0\,;\,0\,;\,0),\ \mathrm{P}(0\,;\,10\,;\,0),\ \mathrm{Q}(0\,;\,11\,;\,1),\ \mathrm{T}(10\,;\,11\,;\,1),\ \mathrm{U}(10\,;\,10\,;\,0)\text{ et }\mathrm{V}(10\,;\,0\,;\,0)$$

La partie plane est délimitée par le rectangle OPUV et l'obstacle par le rectangle PQTU.



Les deux drones sont assimilables à deux points et on suppose qu'ils suivent des trajectoires rectilignes :

- le drone d'Alex suit la trajectoire portée par la droite (AB) avec A(2 ; 4 ; 0,25) et B(2 ; 6 ; 0,75) ;
- le drone d'Élisa suit la trajectoire portée par la droite (CD) avec C(4 ; 6 ; 0,25) et D(2 ; 6 ; 0,25).

Partie A : Étude de la trajectoire du drone d'Alex

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
Un vecteur directeur de cette droite est $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}(0\ ;\ 2\ ;\ 0,5)$. Cette droite passe par A par exemple. On trouve ainsi une représentation paramétrique de (AB) donnée, pour t réel, par

$$\begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \\ z = z_A + t(z_B - z_A) \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 + 2t \\ z = 0,25 + 0,5t \end{cases}$$

2. a. Justifier que le vecteur $\overrightarrow{n}(0\ ;\ 1\ ;\ -1)$ est un vecteur normal au plan (PQU).
$\overrightarrow{PQ}(0\ ;\ 1\ ;\ 1)$ et $\overrightarrow{PU}(10\ ;\ 0\ ;\ 0)$ ne sont pas colinéaires, et on a

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$$
$$\overrightarrow{PU} \cdot \overrightarrow{n} = 10 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times (-1) = 0$$

Ainsi, $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (PQU), donc $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (PQU).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (PQU).
$\overrightarrow{n}$ est normal au plan (PQU) donc ce plan admet une équation du type $0 \times x + 1 \times y + (-1) \times z + d = 0$, c'est-à-dire du type $y - z + d = 0$ avec d à déterminer.
Or, $P(0\ ;\ 10\ ;\ 0)$ appartient à ce plan donc ses coordonnées vérifient l'équation, d'où $10 - 0 + d = 0 \iff d = -10$.. Ainsi, une équation cartésienne de (PQU) est

$$y - z - 10 = 0.$$

3. Démontrer que la droite (AB) et le plan (PQU) sont sécants au point I de coordonnées $\left(2\ ;\ \dfrac{37}{3}\ ;\ \dfrac{7}{3}\right)$.
(AB) de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}(0;2;0.5)$ et le plan (PQU) de vecteur normal $\overrightarrow{n}(0\ ;\ 1\ ;\ -1)$ sont sécants si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} \neq 0$, ce qui est le cas ici. Ils sont donc sécants en un point $I(x\ ;\ y\ ;\ z)$.
Par ailleurs, un point $I(x; y; z)$ appartient à l'intersection de la droite (AB) et du plan (PQU) si et seulement si il satisfait l'équation paramétrique de (AB) et l'équation cartésienne de (PQU) si et seulement

si

$$\begin{cases} x=2 \\ y=4+2t \\ z=0,25+0,5t \\ y-z-10=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=2 \\ y=4+2t \\ z=0,25+0,5t \\ 4+2t-(0,25+0,5t)-10=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=2 \\ y=4+2t \\ z=0,25+0,5t \\ 1,5t-6,25=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=2 \\ y=\frac{37}{3} \\ z=\frac{7}{3} \\ t=\frac{25}{6} \end{cases}$$

Ainsi, la droite (AB) et le plan (PQU) sont sécants au point I de coordonnées $\left(2\,;\,\dfrac{37}{3}\,;\,\dfrac{7}{3}\right)$.

4. Expliquer pourquoi, en suivant cette trajectoire, le drone d'Alex ne rencontre pas l'obstacle.
Les points se situant sur l'obstacle PQTU ont une cote comprise entre 0 et 1. Or, le point I, intersection des droites (AB), décrivant la trajectoire du drone d'Alex, et du plan (PQU), dont l'obstacle est le rectangle PQTU, a une cote de $\dfrac{7}{3} > 2$, donc ne peut se situer sur le rectangle PQTU. Ainsi, en suivant cette trajectoire, le drone d'Alex ne rencontre pas l'obstacle.

Partie B : Distance minimale entre les deux trajectoires

Pour éviter une collision entre leurs deux appareils, Alex et Élisa imposent une distance minimale de 4 mètres entre les trajectoires de leurs drones.
L'objectif de cette partie est de vérifier si cette consigne est respectée.
Pour cela, on considère un point M de la droite (AB) et un point N de la droite (CD).
Il existe alors deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CN} = b\overrightarrow{CD}$.
On s'intéresse donc à la distance MN.

1. Démontrer que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sont $(2-2b\,;\,2-2a\,;\,-0,5a)$.
Par la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN} \\ &= -\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN} \\ &= -a\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+b\overrightarrow{CD} \\ &= -a(0\,;\,2\,;\,0,5)+(2\,;\,2\,;\,0)+b(-2\,;\,0\,;\,0) \\ &= (2-2b\,;\,2-2a\,;\,-0,5a) \end{aligned}$$

2. On admet que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires. On admet également que la distance MN est minimale lorsque la droite (MN) est perpendiculaire à la fois à la droite (AB) et à la droite (CD).
Démontrer alors que la distance MN est minimale lorsque $a = \frac{16}{17}$ et $b = 1$.
D'après ce qui est dit dans l'énoncé, la distance MN est minimale si et seulement si (MN) et (AB) sont perpendiculaires **et** (MN) et (CD) sont perpendiculaires. Ceci équivaut à $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AB}$ orthogonaux **et** $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{CD}$ orthogonaux, ce qui équivaut encore à $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ **et** $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$, ce qui équivaut au système

$$\begin{cases} 2(2-2a)-0,5\times 0,5a=0 \\ -2(2-2b)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4-4,25a=0 \\ 2-2b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=\frac{4}{4,25}=\frac{16}{17} \\ b=1 \end{cases}$$

3. En déduire la valeur minimale de la distance MN puis conclure.
La distance MN est minimale lorsque $a = \frac{16}{17}$ et $b = 1$, et on a donc $\overrightarrow{MN}\left(0; \frac{2}{17}, \frac{-8}{17}\right)$. Ainsi, la distance minimale MN est donnée par

$$MN = \sqrt{(0)^2+\left(\frac{2}{17}\right)^2+\left(\frac{-8}{17}\right)^2} = \frac{2\sqrt{17}}{17}.$$

Or $\frac{2\sqrt{17}}{17} \approx 0{,}485\,071$.
L'unité étant égale à 1 décamètre la distance minimale est donc environ $4,85 > 4$: la consigne est respectée.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

On considère le nombre complexe $c = \dfrac{1}{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$ et les points S et T d'affixes respectives c^2 et $\dfrac{1}{c}$.

1. **Affirmation 1 :** Le nombre c peut s'écrire $c = \dfrac{1}{4}\left(1-\text{i}\sqrt{3}\right)$.

   FAUSSE.

   On peut utiliser la forme trigonométrique de $\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}} = \cos(\frac{\pi}{3}) + \text{i}\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{i}$, d'où

$$c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{i}\right) = \frac{1}{4}\left(1+\text{i}\sqrt{3}\right) \neq \frac{1}{4}\left(1-\text{i}\sqrt{3}\right).$$

   Remarques :

   1) on aurait pu le constater en remarquant que l'argument de c est $\dfrac{\pi}{3}$ donc pour un tel angle, sa partie imaginaire (et sa partie réelle sont) est positive(s).

   2) Il est aussi possible (mais c'est plus long) d'écrire la forme exponentielle de $\dfrac{1}{4}\left(1-\text{i}\sqrt{3}\right)$ et de vérifier que l'on ne retombe pas sur c.

   N'oubliez pas qu'on peut vérifier nos calculs à la calculatrice, en passant de la forme exponentielle à la forme algébrique (ou l'inverse) : **RUN MAT // OPTN // CPLX (F3) // ...**

2. **Affirmation 2 :** Pour tout entier naturel n, c^{3n} est un nombre réel.

   VRAIE.

   Pour tout entier naturel n, on a

$$c^{3n} = \left(\frac{1}{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}\right)^{3n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3n} \times \left(\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}\right)^{3n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3n} \times \text{e}^{\text{i}n\times\pi} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3n} \times (-1)^n \in \mathbb{R}$$

   puisque $\text{e}^{i\pi} = -1$ (relation d'Euler).

3. **Affirmation 3 :** Les points O, S et T sont alignés.

   VRAIE.

   On calcule par exemple l'angle $(\overrightarrow{OT}, \overrightarrow{OS})$ via

$$\frac{z_S - z_O}{z_T - z_O} = \frac{c^2 - 0}{\frac{1}{c} - 0} = c^2 \times c = c^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(e^{\text{i}\frac{\pi}{3}}\right)^3 = -\frac{1}{8}.$$

   Ainsi, puisque ce rapport est réel, on en déduit que les points O, S, T sont alignés.

4. **Affirmation 4 :** Pour tout entier naturel non nul n,

$$|c| + \left|c^2\right| + \ldots + \left|c^n\right| = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

   VRAIE.

   La forme exponentielle de c, on a pour tout entier naturel k, $|c|^k = \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$.

   Ainsi, on a par somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $|c| = \dfrac{1}{2}$,

   on obtient

$$|c| + \left|c^2\right| + \ldots + \left|c^n\right| = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

EXERCICE 4 **6 points**

CANDIDATS N'AYANT PAS SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Lors d'une soirée, une chaîne de télévision a retransmis un match. Cette chaîne a ensuite proposé une émission d'analyse de ce match.
On dispose des informations suivantes :

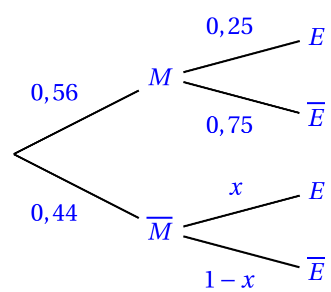
- 56 % des téléspectateurs ont regardé le match ;
- un quart des téléspectateurs ayant regardé le match ont aussi regardé l'émission ;
- 16,2 % des téléspectateurs ont regardé l'émission.

On interroge au hasard un téléspectateur. On note les évènements :

- M : « le téléspectateur a regardé le match » ;
- E : « le téléspectateur a regardé l'émission ».

On note x la probabilité qu'un téléspectateur ait regardé l'émission sachant qu'il n'a pas regardé le match.

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.



2. Déterminer la probabilité de $M \cap E$.

$p(M \cap E) = 0,56 \times 0,25 = 0,14$.

3. **a.** Vérifier que $p(E) = 0,44x + 0,14$.

D'après la formule des probabilités totales, on a $P(E) = p(M \cap E) + p\left(\overline{M} \cap E\right) = 0,56 \times 0,25 + 0,44 \times x = 0,14 + 0,44x$.

b. En déduire la valeur de x.

D'après l'énoncé, on sait que $p(E) = 0,162$ car 16,2% des téléspectateurs ont regardé l'émission. On a donc

$$0,14 + 0,44x = 0,162 \iff x = \frac{0,162 - 0,14}{0,44} = 0,05.$$

Ainsi, il y a 5% des téléspectateurs ayant regardé l'émission sachant qu'ils n'ont pas regardé le match.

4. Le téléspectateur interrogé n'a pas regardé l'émission. Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'il ait regardé le match ?

On cherche $p_{\overline{E}}(M)$. D'après la formule des probabilités conditionnelles, on a

$$p_{\overline{E}}(M) = \frac{p\left(M \cap \overline{E}\right)}{p\left(\overline{E}\right)} = \frac{0,56 \times 0,75}{1 - 0,162} \approx 0,50.$$

Partie B

Pour déterminer l'audience des chaînes de télévision, un institut de sondage recueille, au moyen de boîtiers individuels, des informations auprès de milliers de foyers français.
Cet institut décide de modéliser le temps passé, en heure, par un téléspectateur devant la télévision le soir du match, par une variable aléatoire T suivant la loi normale d'espérance $\mu = 1,5$ et d'écart-type $\sigma = 0,5$.

1. Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'un téléspectateur ait passé entre une heure et deux heures devant sa télévision le soir du match ?

Grâce à la calculatrice, on obtient $p(1 \leq T \leq 2) \approx 0,683$., en prenant Lower=1, Upper=2, $\sigma = 0,5$ et $\mu = 1,5$.

2. Déterminer l'arrondi à 10^{-2} du réel t tel que $P(T \geqslant t) = 0,066$. Interpréter le résultat.

$$P(T \geqslant t) = 0,066 \iff P\left(\frac{T-1,5}{0,5} \geqslant \frac{t-1,5}{0,5}\right) = 0,066$$

Ainsi, la variable aléatoire $Z = \dfrac{T-1,5}{0,5}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0;1)$. En utilisant la fonction inverse normale avec Tail : Right, Area : 0,066, $\sigma = 1$ et $\mu = 0$, on obtient l'équation $\dfrac{t-1,5}{0,5} \approx 1,5063$, d'où $t = 0,5 \times 1,5063 + 1,5 \approx 2,25$.

Remarque : Ici, on pouvait aussi, sans passer par un changement de variable pour se ramener à une loi normale $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$, utiliser directement la fonction inverse normale avec Tail : Right, Area : 0,066, $\sigma = 0,5$ et $\mu = 1,5$, ce qui donnait directement $t \approx 2,2532...$. C'est plus simple et plus rapide, mais la démonstration précédente est tout de même à connaître pour toutes les preuves où on ne connait pas simultanément μ et σ.

Partie C

La durée de vie d'un boîtier individuel, exprimée en année, est modélisée par une variable aléatoire notée S qui suit une loi exponentielle de paramètre λ strictement positif. On rappelle que la densité de probabilité de S est la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

L'institut de sondage a constaté qu'un quart des boîtiers a une durée de vie comprise entre un et deux ans.
L'usine qui fabrique les boîtiers affirme que leur durée de vie moyenne est supérieure à trois ans.
L'affirmation de l'usine est-elle correcte ? La réponse devra être justifiée.

D'après l'énoncé, on sait que $P(1 \leq S \leq 2) = 0,25$. On cherche à savoir si $E(S) = \dfrac{1}{\lambda} > 3$.
Or,

$$\begin{aligned}
P(1 \leq S \leq 2) = 0,25 &\iff P(S \geqslant 1) - P(S \geqslant 2) = 0,25\\
&\iff \mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-2\lambda} = 0,25\\
&\iff 0,25 - \mathrm{e}^{-\lambda} + \left(\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^2 = 0\\
&\iff X^2 - X + 0,25 = 0 \qquad \text{en posant } X = \mathrm{e}^{-\lambda}
\end{aligned}$$

Cette équation admet l'unique solution

$$X = \frac{1}{2} \iff \mathrm{e}^{-\lambda} = \frac{1}{2} \iff -\lambda = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) \iff \lambda = \ln(2).$$

Ainsi, on en déduit que $E(S) = \dfrac{1}{\ln(2)} \approx 1,44 < 3$. L'affirmation est donc fausse.

Exercice 4 **6 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On étudie l'évolution quotidienne des conditions météorologiques d'un village sur une certaine période. On suppose que, pour un jour donné, il existe trois états météorologiques possibles : « ensoleillé », « nuageux sans pluie » et « pluvieux ».
On sait que :

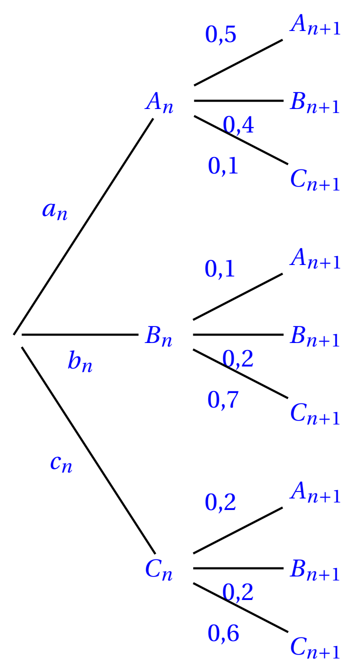
- si le temps est ensoleillé un jour donné, la probabilité qu'il le soit encore le lendemain est $0,5$ et celle qu'il soit pluvieux est $0,1$;
- si le temps est nuageux sans pluie un jour donné, la probabilité qu'il le soit encore le lendemain est $0,2$ et celle qu'il soit pluvieux est $0,7$;
- si le temps est pluvieux un jour donné, la probabilité qu'il le soit encore le lendemain est $0,6$ et celle qu'il soit ensoleillé $0,2$.

Pour tout entier naturel n, on note les évènements :

- A_n : « le temps est ensoleillé au bout de n jours » ;
- B_n : « le temps est nuageux sans pluie au bout de n jours » ;
- C_n : « le temps est pluvieux au bout de n jours ».

Pour tout entier naturel n, on note respectivement a_n, b_n et c_n les probabilités des évènements A_n, B_n et C_n. Ainsi, pour tout entier naturel n, $a_n + b_n + c_n = 1$.
On suppose qu'initialement, le temps est ensoleillé.
On a donc $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$.

1. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,1b_n + 0,2c_n$.



Ainsi, par la formule des probabilités totales, on a, pour tout entier naturel n,

$$p(A_{n+1}) = p(A_n \cap A_{n+1}) + p(B_n \cap A_{n+1}) + p(C_n \cap A_{n+1}) \iff a_{n+1} = 0,5a_n + 0,1b_n + 0,2c_n$$

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,3a_n - 0,1b_n + 0,2$.
On sait que $a_n + b_n + c_n = 1 \iff c_n = 1 - a_n - b_n$. En remplaçant cette dernière égalité dans l'équation de la question précédente, on obtient, pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} a_{n+1} = 0,5a_n + 0,1b_n + 0,2c_n &\iff a_{n+1} = 0,5a_n + 0,1b_n + 0,2 \times (1 - a_n - b_n) \\ &\iff a_{n+1} = 0,3a_n - 0,1b_n + 0,2 \end{aligned}$$

On admet que, pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = 0,2a_n + 0,2$.

2. On considère les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,1 \\ 0,2 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \quad R\begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix}.$$

a. Justifier que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n + R$.

On calcule le produit matricielle

$$MU_n + R = \begin{pmatrix}0,3 & -0,1\\0,2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0,2\\0,2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,3a_n - 0,1b_n + 0,2\\0,2a_n + 0,2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix} = U_{n+1}$$

b. Soit $Y = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ tel que $Y = MY + R$. Démontrer que $\alpha = \beta = 0,25$.

$$Y = MY+R \iff \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,3 & -0,1\\0,2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0,2\\0,2\end{pmatrix} \iff \begin{cases}\alpha = 0,3\alpha - 0,1\beta + 0,2\\\beta = 0,2\alpha + 0,2\end{cases} \iff \cdots \iff \begin{cases}\alpha = 0,25\\\beta = 0,25\end{cases}$$

3. Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = U_n - Y$.

a. En utilisant la question 2., vérifier que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = MV_n$.

Pour tout entier naturel n, on a

$$V_{n+1} = U_{n+1} - Y = MU_n + R - Y = MU_n - MY = M(U_n - Y) = MV_n$$

car $Y = MY + R \iff R - Y = -MY$ et en utilisant deux fois la relation $V_n = U_n - Y$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n strictement positif, $V_n = M^n V_0$.

Initialisation : Plutôt que de faire des gros calculs matriciels, utilisons les relations précédemment démontrées et ce qu'on nous donne. Pour $n = 1$, on a

$$M^1 V_0 = MV_0 = M(U_0 - Y) = MU_0 - MY = MU_0 - (Y - R) = MU_0 + R - Y.$$

et

$$V_1 = U_1 - Y = MU_0 + R - Y.$$

Ces deux relations nous donnent $V_1 = M^1 V_0$, donc la propriété est satisfaite pour $n = 1$.

Hérédité : Supposons la propriété établie à un certain rang $n \geqslant 0$, c'est-à-dire $V_n = M^n V_0$ (**H.R.**). Montrons que cette propriété reste vraie au rang $n+1$ (But : $V_{n+1} = M^{n+1}V_0$).

$$V_{n+1} = MV_n \overset{\textbf{(H.R)}}{=} MM^n V_0 = M^{n+1} V_0$$

Ainsi la propriété est héréditaire.

La relation est vraie au rang 1 et si elle est vraie au rang $n \geqslant 1$, elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence la relation est vraie pour tout naturel supérieur ou égal à 1 : $V_n = M^n V_0$.

4. On admet que, pour tout entier naturel strictement positif n,

$$M^n = \begin{pmatrix}2\times 0,2^n - 0,1^n & 0,1^n - 0,2^n\\2\times 0,2^n - 2\times 0,1^n & 2\times 0,1^n - 0,2^n\end{pmatrix}.$$

a. Déterminer l'expression de a_n en fonction de l'entier strictement positif n.

Puisque $V_n = M^n V_0$, on en déduit que $U_n = M^n V_0 + Y = M^n(V_0 - Y) + Y$, ce que l'on réécrit par

$$\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\times 0,2^n - 0,1^n & 0,1^n - 0,2^n\\2\times 0,2^n - 2\times 0,1^n & 2\times 0,1^n - 0,2^n\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0,25\\0,25\end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix}0,25\\0,25\end{pmatrix}$$

De ceci, on en déduit que, pour tout entier naturel n, $a_n = 1,75\times 0,2^n - 0,1^n + 0,25$.

b. Déterminer la limite de la suite (a_n).

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,2^n = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} 0,1^n$, par somme de limites, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0,25$$

c. On admet que, pour tout entier naturel n, $c_n = 0,5 + 3 \times 0,1^n - 3,5 \times 0,2^n$.
La probabilité que le temps soit pluvieux au bout de n jours peut-elle dépasser $0,5$?
$c_n > 0,5 \iff 3 \times 0,1^n - 3,5 \times 0,2^n > 0 \iff \left(\frac{0,1}{0,2}\right)^n > \frac{3,5}{3} \iff n\ln\left(\frac{0,1}{0,2}\right) > \ln\left(\frac{3,5}{3}\right)$ par croissance de la fonction logarithme.
Or, $\ln\left(\frac{0,1}{0,2}\right) = -\ln(2) < 0$ et $\ln\left(\frac{3,5}{3}\right) = \ln(7) - \ln(6) > 0$, donc $c_n > 0,5 \iff n < \dfrac{\ln(7) - \ln(6)}{-\ln(2)} < 0$: ceci est impossible car n est un entier naturel, donc positif.
Ainsi, la probabilité que le temps soit pluvieux au bout de n jours ne peut pas dépasser $0,5$.