Durée : 4 heures

∽ Corrigé du baccalauréat S Métropole–La Réunion ∽ 13 septembre 2019

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. On a $P(X \leqslant 10) \approx 0,332304$, donc $P(X \geqslant 10) \approx 0,667696$, soit environ 0,668.

   On admet que la probabilité que le dossier choisi, sachant qu'il est de type B, soit celui d'un candidat reçu est égale à $0,70$.

2. La probabilité qu'un candidat soit reçu est égale :

   $P(R) = P(A \cap R) + P(B \cap R) = 0,6 \times 0,67 + 0,4 \times 0,70 = 0,402 + 0,280 = 0,682$, soit $0,68$ au centième près.

3. Le jury examine 500 dossiers choisis aléatoirement parmi les dossiers de type B. Parmi ces dossiers, 368 sont ceux de candidats reçus à l'examen.

   On a $n = 500$, $n \geqslant 30$, et $p = 0,68$. On a $np = 500 \times 0,68 = 340 \geqslant 5$; $n(1-p) = 500 \times 0,32 = 160 \geqslant 5$.

   L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est :

$$\left[p - 1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right] = [0,639\ ;\ 0721]$$

   La fréquence de reçus dans l'échantillon est égale à : $\dfrac{368}{500} = 0,736$. Comme $0,736 \notin [0,639\ ;\ 0721]$,le membre du jury a raison.

4. La probabilité d'obtenir un prix du jury étant faible, partons d'une note minimale de 15.

   Dans ce cas la probabilité d'avoir un prix du jury est égale à :

   $p_{15} = 0,6P(X \geqslant 15) + 0,4P(X \geqslant 15)$; la calculatrice donne $p_{15} \approx 0,38$.

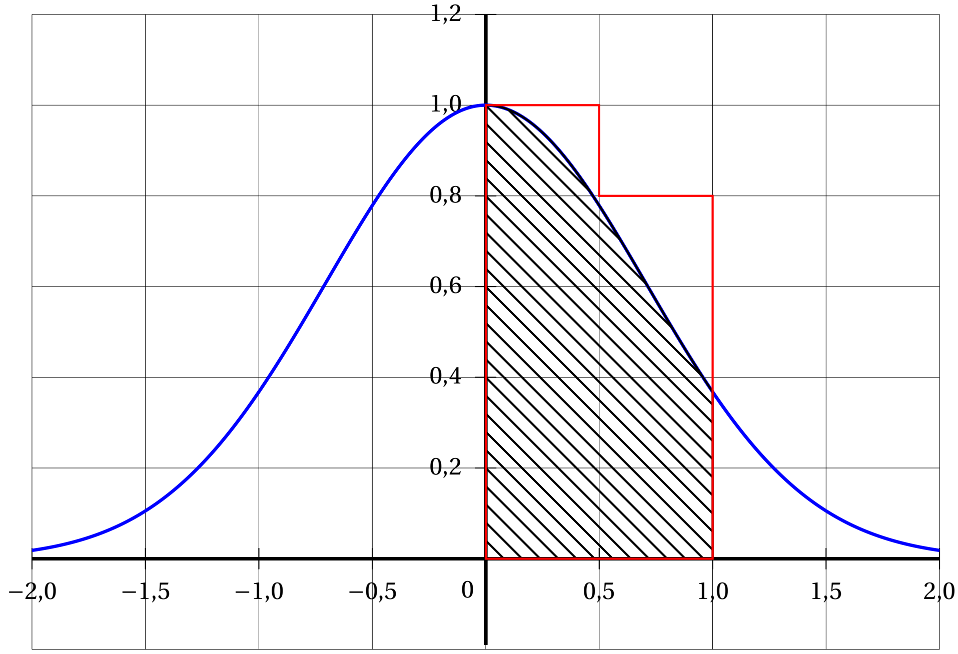
   Avec une note minimale de 16 :

   $p_{16} = 0,6P(X \geqslant 16) + 0,4P(X \geqslant 165)$; la calculatrice donne $p_{16} \approx 0,12$.

   Conclusion : le prix du jury est accordé à tous les candidats ayant au moins 16.

Exercice 2 **6 points**

Commun à tous les candidats



1. La fonction G intégrale d'une fonction positive est croissante sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

   On a en, effet $G'(t) = g(t) > 0$, d'après l'énoncé.

2. $G(1)$ est égale à l'aire (en unité d'aire) de la surface hachurée. Celle-ci a une aire inférieure à celle du polygone rouge composé de 9 rectangles d'aire $0,5 \times 0,2 = 0,1$. l'aire du polygone est donc égale à 0,9 et $G(1) < 0,9$.

3. Pour $t \geqslant 0$, $G(-t) = \displaystyle\int_0^{-t} g(u)\,\mathrm{d}u = -\int_{-t}^{0} g(u)\,\mathrm{d}u = -\int_0^{t} g(u)\,\mathrm{d}u$, d'après la symétrie de $\mathscr{C}_g$ autour de l'axe des ordonnées.

   D'après la question précédente G est croissante sur $[0~;~+\infty[$ et comme $G(0) = 0$, on a donc $G(t) > 0$ pour t positif, donc $G(-t) < 0$: la fonction G n'est pas positive sur $\mathbb{R}$.

Dans la suite du problème, la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(u) = \mathrm{e}^{-u^2}$.

Partie B

1. Étude de g

   a. On sait que $\displaystyle\lim_{u\to-\infty} \mathrm{e}^{-u^2} = \lim_{u\to+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{u\to-\infty} g(u) = \lim_{u\to+\infty} g(u) = 0$.

   b. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

   $g'(u) = -2u\mathrm{e}^{-u^2}$. Comme $\mathrm{e}^{-u^2} > 0$ quel que soit le réel u, le signe de $g'(u)$ est donc celui de $-u$.

   Sur $\mathbb{R}^-$, $-u \geqslant 0$, donc $g'(u) \geqslant 0$: la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}^-$;

   Sur $\mathbb{R}^+$, $-u \leqslant 0$, donc $g'(u) \leqslant 0$: la fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

c. La fonction g étant croissante sur $\mathbb{R}^-$, puis décroissante sur $\mathbb{R}^+$, elle a pour maximum $g(0) = \mathrm{e}^0 = 1$.
Conclusion : $g(x) \leqslant 1$ et en particulier $g(1) \leqslant 1$.

2. **a.** On lit $f = \dfrac{77}{100} = 0,77$.

b. f, x et y sont des nombres réels, n, c et i sont des entiers naturels.
ALEA est une fonction qui génère aléatoirement un nombre compris entre 0 et 1.

```
c ← 0
Pour i variant de 1 à n faire :
        x ← ALEA
        y ← ALEA
    Si y ⩽ e^(−x²) alors
        c ← c + 1
    fin Si
fin Pour
        f ← c/n
```

c. Une exécution de l'algorithme pour $n = 1\,000$ donne $f = 0,757$.
L'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la valeur exacte de I est $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right] = [0,725\ ;\ 0,789]$.

Partie C

On se propose de déterminer une majoration de $G(t)$ pour $t \geqslant 1$.

1. *Un résultat préliminaire.*

On admet que, pour tout réel $u \geqslant 1$, on a $g(u) \leqslant \dfrac{1}{u^2}$.

Si pour $u \geqslant 1$, on a $g(u) \leqslant \dfrac{1}{u^2}$, alors en intégrant ces fonctions de 1 à t : $\displaystyle\int_1^t g(u)\,\mathrm{d}u \leqslant \int_1^t \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u$, soit :

$\displaystyle\int_1^t g(u)\,\mathrm{d}u \leqslant \left[-\frac{1}{u}\right]_1^t$ ou $\displaystyle\int_1^t g(u)\,\mathrm{d}u \leqslant -\frac{1}{t} + 1$

2. On a $G(t) = \displaystyle\int_0^1 g(u)\,\mathrm{d}u + \int_1^t g(u)\,\mathrm{d}u$.

On a vu à la question 1. c. que sur $[0;\,1]$, $g(t) \leqslant 1$ et donc en intégrant qur l'intervalle $[0;\,1]$, $G(t) \leqslant 1$.

Dans la question précédente on a démontré que :

$\displaystyle\int_1^t g(u)\,\mathrm{d}u \leqslant 1 - \frac{1}{t}$, d'où par somme :

$G(t) \leqslant 2 - \dfrac{1}{t}$. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{t} = 0$, la limite de $G(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$ est majorée par 2.

Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Préciser si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

1. **a. Affirmation 1** :
   On a $(E): 2z^2+(4-5)z+4=0 \iff 2z^2-z+4=0$.
   On a $\Delta = 1-32<0$: les solutions sont donc complexes. **Affirmation 1** : fausse.

   b. Si ai est une solution imaginaire pure, alors :
   $$-2a^2+2a\text{i}(m-5)+m=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl}-2a^2+m &=& 0\\ m-5 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} m &=& 2a^2\\ m &=& 5\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl}\sqrt{\frac{5}{2}} &=& a\\ m &=& 5\end{array}\right.$$
   Pour $m=5$ il existe deux solutions imaginaires pures : $\sqrt{\frac{5}{2}}\text{i}$ et $-\sqrt{\frac{5}{2}}\text{i}$. **Affirmation 2** : vraie.

2. Soit A et B les points d'affixes respectives 6 et 5i. Alors $|z-6|=|z+5\text{i}|$ signifie $M\text{A}=M\text{B}$, M étant un point d'affixe z. Donc S est la droite médiatrice du segment [AB]. **Affirmation 3** : fausse.

3.
$$d: \left\{\begin{array}{lcl} x &=& -1+t\\ y &=& 2-t\\ z &=& 3+t\end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}.$$

   On note d' la droite passant par le point B(4 ; 4 ; −6) et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}(5\,;\,2\,;\,-9)$. Une équation paramétrique de d' est : $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 4+5t'\\ y &=& 4+2t'\\ z &=& -6-9t'\end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}$.

   Ces droites ne sont pas parallèles car leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires. lles sont sécantes si :
$$\left\{\begin{array}{lcl} -1+t &=& 4+5t'\\ 2-t &=& 4+2t'\\ 3+t &=& -6-9t'\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} t &=& 5+5t'\\ t &=& -2-2t'\\ t &=& -9-9t'\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} t &=& 5+5t'\\ 5+5t' &=& -2-2t'\\ 5+5t' &=& -9-9t'\end{array}\right. \iff$$
$$\left\{\begin{array}{lcl} t &=& 5+5t'\\ 7t' &=& -7\\ 14t' &=& -14\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} t &=& 5+5t'\\ t' &=& -1\\ t' &=& -1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} t &=& 5-5\\ t' &=& -1\\ t' &=& -1\end{array}\right..$$
   Il existe donc un point commun à d et à d' le point de coordonnées (−1 ; 2 3). les droites sont donc coplanaires.

   Affirmation 4 : vraie.

4. En prenant comme repère $\left(\overrightarrow{\text{AB}}\,;\,\overrightarrow{\text{AD}}\,;\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$, on a A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), D(0;1; 0), E(0; 0; 1), G(1; 1; 1).

   On a $\overrightarrow{\text{DE}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\text{BG}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

   Or $\overrightarrow{\text{DE}}\cdot\overrightarrow{\text{AB}} = 0+0+0=0$ et $\overrightarrow{\text{DE}}\cdot\overrightarrow{\text{BG}}=0-1+1=0$.
   $\overrightarrow{\text{DE}}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan ABG, il est donc normal à ce plan.
   Affirmation 5 : vraie.

Exercice 4 **5 points**
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

$$f(x)=\frac{2+3x}{4+x}.$$

Partie A

1. $u_1 = f(u_0) = \dfrac{2+9}{4+3} = \dfrac{11}{7}$.

2. La fonction f est définie et dérivable sur $[0\,;4]$ et sur cet intervalle :

   $f'(x) = \dfrac{3(4+x)-1(2+3x)}{(4+x)^2} = \dfrac{12+3x-2-3x}{(4+x)^2} = \dfrac{10}{(4+x)^2}$

   Quotient de nombres positifs ce nombre dérivé est positif quel que soit x dans l'intervalle $[0\,;4]$. La fonction f est donc croissante sur $[0\,;4]$.

3. Démonstration par récurrence :

   Initialisation

   On a d'après la première question : $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 3$: l'encadrement est vrai au rang 0;

   Hérédité

   Supposons que pour $n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$; par croissance de la fonction f sur $[0\,;4]$, on $f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(3)$ ou car $f(1) = \dfrac{5}{5} = 1$ et $f(3) = \dfrac{11}{7} \leqslant 3$,

   $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$: la relation est donc vraie au rang $n+1$.

   Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai à un rang quelconque n il est vrai au rang suivant $n+1$: d'après le principe de récurrence pour tout naturel $n, \quad 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$.

4. **a.** D'après la question précédente la suite (u_n) est décroissante, minorée par 1 : elle converge donc vers une limite $\ell \geqslant 1$.

   b. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n); montrer l'égalité :

   $$\ell = \frac{2+3\ell}{4+\ell}$$

   .

   c. De l'égalité $u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{2+3u_n}{4+u_n}$ on en déduit par continuité de la fonction f (puisque f est dérivable) :

   $$\ell = \frac{2+3\ell}{4+\ell}.$$

   On en dédit que $\ell(4+\ell) = 2+3\ell \iff \ell+\ell-2 = 0$.
   Or $\Delta = 1+4\times 2 = 9 = 3^2$. Il y a deux solutions :
   $\ell_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$ et $\ell_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$.
   Comme $\ell \in [1\ ;\ 3]$, la seule solution est $\ell_2 = 1$.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = 0,1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = f(v_n).$$

1. Voir à la fin l'annexe. l'**annexe, à rendre avec la copie**.

   On peut conjecturer que la suite (v_n) est croissante et qu'elle a pour limite 1.

2. **a.** $1 - v_{n+1} = 1 - \dfrac{2+3v_n}{4+v_n} = \dfrac{4+v_n-2-3v_n}{4+v_n} = \dfrac{2-2v_n}{4+v_n} = \dfrac{2}{4+v_n}(1-v_n)$.

b. *Initialisation* pour $n = 0$, $1 - v_0 = 0,9$; or $\left(\dfrac{1}{2}\right)^0 = 1$.

On a bien $0 \leqslant 1 - v_0 \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^0$.

Hérédité Supposons qu'au rang $n \in \mathbb{N}$ quelconque, on ait $1 - v_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

On a $1 - v_{n+1} = \dfrac{2}{4 + v_n}(1 - v_n)$, donc d'après l'hypothèse de récurrence :

$1 - v_{n+1} \leqslant \dfrac{2}{4 + v_n} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Or $0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \iff v_n \geqslant 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \geqslant 0$; il suit que $4 + v_n \geqslant 4$, donc en prenant les inverses $0 \leqslant \dfrac{1}{4 + v_n} \leqslant \dfrac{1}{4}$.

On a donc $0 \leqslant 1 - v_{n+1} \leqslant 2 \times \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, soit finalement :

$0 \leqslant 1 - v_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$: l'encadrement est vrai au rang $n + 1$.

L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai à un rang $n$quelconque il est vrai au rang $n + 1$: d'après le principe de récurrence :

quel que soit le naturel n, $0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

3. Comme $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, donc l'encadrement trouvé à la question précédente montre que la la limite de $1 - v_n = 0$, donc :

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = 1.$$

Exercice 4 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Un laboratoire étudie l'évolution d'une population d'insectes parasites de plantes.

Cette évolution comporte deux stades : un stade larvaire et un stade adulte qui est le seul au cours duquel les insectes peuvent se reproduire.

L'observation de l'évolution de cette population conduit à proposer le modèle suivant.

Chaque semaine :

- Chaque adulte donne naissance à 2 larves puis 75 % des adultes meurent.
- 25 % des larves meurent et 50 % des larves deviennent adultes.

Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n le nombre de larves et a_n le nombre d'adultes au bout de n semaines.

Pour tout entier naturel n, on note X_n la matrice colonne définie par : $X_n = \begin{pmatrix} \ell_n \\ a_n \end{pmatrix}$

1. Chaque semaine,

- chaque adulte donne naissance à 2 larves, donc la part de larves la semaine $n+1$ provenant des adultes de la semaine n est $2 \times a_n$;
- 25 % des larves meurent et 50 % des larves deviennent adultes, donc il reste 25 % de larves quand on passe de la semaine n à la semaine $n+1$. La part de larves la semaine $n+1$ provenant des larves de la semaine n est $0,25\ell_n$.

On a donc $\ell_{n+1} = 0,25\ell_n + 2a_n$.

Chaque semaine,

- 75 % des adultes meurent donc il en reste 25 % : la part des adultes la semaine $n+1$ provenant des adultes de la semaine n est $0,25a_n$;
- 50 % des larves deviennent adultes donc la part des adultes la semaine $n+1$ provenant des larves de la semaine n est $0,5\ell_n$.

On a donc $a_{n+1} = 0,5\ell_n + 0,25a_n$.

Le système $\left\{\begin{array}{rcrcr} \ell_{n+1} &=& 0,25\ell_n &+& 2a_n \\ a_{n+1} &=& 0,5\ell_n &+& 0,25a_n \end{array}\right.$ s'écrit sous forme matricielle
$\begin{pmatrix} \ell_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 & 2 \\ 0,5 & 0,25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \ell_n \\ a_n \end{pmatrix}$ ou encore $X_{n+1} = AX_n$ où $A = \begin{pmatrix} 0,25 & 2 \\ 0,5 & 0,25 \end{pmatrix}$.

2. On note U et V les matrices colonnes : $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$, où a est un nombre réel.

a. $AU = \begin{pmatrix} 0,25 & 2 \\ 0,5 & 0,25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 \times 2 + 2 \times 1 \\ 0,5 \times 2 + 0,25 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 1,25 \end{pmatrix} = 1,25 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1,25U$.

b. $AV = -0,75V \iff \begin{pmatrix} 0,25 & 2 \\ 0,5 & 0,25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = -0,75 \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0,25a + 2 \\ 0,5a + 0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,75a \\ -0,75 \end{pmatrix}$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 0,25a + 2 &=& -0,75a \\ 0,5a + 0,25 &=& -0,75 \end{array}\right. \iff a = -2$$

Dans la suite, le réel a est fixé de sorte qu'il est la solution de $AV = -0,75V$ donc $V = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. On admet qu'il existe deux nombres réels α et β tels que : $X_0 = \alpha U + \beta V$ et $\alpha > 0$.

a. Soit $\mathscr{P}_n$ l'égalité $X_n = \alpha(1,25)^n U + \beta(-0,75)^n V$.
On va démontrer par récurrence sur n que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n.

- **Initialisation**
On sait que $X_0 = \alpha U + \beta V$ donc $X_0 = \alpha(1,25)^0 U + \beta(-0,75)^0 V$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité**
On suppose la propriété vraie pour un n quelconque, et on va démontrer qu'elle est vraie au rang $n+1$.
$X_n = \alpha(1,25)^n U + \beta(-0,75)^n V$ donc
$X_{n+1} = AX_n = A\left(\alpha(1,25)^n U + \beta(-0,75)^n V\right) = \alpha(1,25)^n AU + \beta(-0,75)^n AV$
Or $AU = 1,25U$ et $AV = -0,75V$ donc
$X_{n+1} = \alpha(1,25)^n(1,25)U + \beta(-0,75)^n(-0,75)V = \alpha(1,25)^{n+1}U + \beta(-0,75)^{n+1}V$
La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion**
La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout n, donc elle est vraie pour tout n.

Pour tout n, on a $X_n = \alpha(1,25)^n U + \beta(-0,75)^n V$.

b. $X_n = \alpha(1,25)^n U + \beta(-0,75)^n V$ donc $\begin{pmatrix}\ell_n\\a_n\end{pmatrix} = \alpha(1,25)^n \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \beta(-0,75)^n \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ ce qui équivaut

à $\left\{\begin{array}{rcl}\ell_n &=& 2\alpha(1,25)^n - 2\beta(-0,75)^n\\ a_n &=& \alpha(1,25)^n + \beta(-0,75)^n\end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{rcl}\ell_n &=& 2(1,25)^n\left(\alpha - \beta\left(\dfrac{-0,75}{1,25}\right)^n\right)\\ a_n &=& (1,25)^n\left(\alpha + \beta\left(\dfrac{-0,75}{1,25}\right)^n\right)\end{array}\right.$

c'est-à-dire $\left\{\begin{array}{rcl}\ell_n &=& 2(1,25)^n\left(\alpha - \beta(-0,6)^n\right)\\ a_n &=& (1,25)^n\left(\alpha + \beta(-0,6)^n\right)\end{array}\right.$

4. $\dfrac{\ell_n}{a_n} = \dfrac{2(1,25)^n\left(\alpha - \beta(-0,6)^n\right)}{(1,25)^n\left(\alpha + \beta(-0,6)^n\right)} = \dfrac{2\left(\alpha - \beta(-0,6)^n\right)}{\left(\alpha + \beta(-0,6)^n\right)}$

Or $-1 < 0,6 < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(0,6)^n = 0$;

il s'ensuit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2\left(\alpha - \beta(-0,6)^n\right) = 2\alpha$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\alpha + \beta(-0,6)^n\right) = \alpha$.

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\ell_n}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2\alpha}{\alpha} = 2$.

On en déduit, qu'à long terme, le nombre de larves sera le double du nombre d'adultes.

Partie B

1. On considère l'équation (E) : $19x - 6y = 1$.

Les nombres 19 et 6 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Bézout, l'équation $19x - 6y = 1$ admet une infinité de couples d'entiers relatifs $(a\,;\,b)$ solutions.

$19 \times 1 - 6 \times 3 = 1$ donc le couple $(1\,;\,3)$ est solution de (E).

- Soit $(a\,;\,b)$ un couple d'entier solutions de (E) ; on a donc $19 \times a - 6 \times b = 1$.

  $\left.\begin{array}{rcl}19\times 1 - 6\times 3 &=& 1\\ 19\times a - 6\times b &=& 1\end{array}\right\} \overset{\text{par soustraction}}{\Longrightarrow} 19(1-a) - 6(3-b) = 0$ donc $19(1-a) = 6(3-b)$

  $19(1-a) = 6(3-b)$ donc 19 divise $6(3-b)$; or 19 et 6 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 19 divise $3-b$. Donc $3-b$ peut s'écrire $19k$ où k est un entier relatif, ce qui entraîne $b = 3-19k$.

  $19(1-a) = 6(3-b)$ et $3-b = 19k$ donc $19(1-a) = 6\times 19k$ donc $1-a = 6k$, ce qui entraîne $a = 1-6k$.

  On peut donc dire que si $(a\,;\,b)$ est une solution de (E), alors $(a\,;\,b)$ s'écrit sous la forme $(1-6k\,;\,3-19k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

- Réciproquement, pour tout k de $\mathbb{Z}$, $19(1-6k) - 6(3-19k) = 19 - 114k - 18 + 114k = 1$ donc tout couple $(1-6k\,;\,3-19k)$ où $k \in \mathbb{Z}$ est solution de (E).

L'ensemble des solutions de (E) est donc $\left\{(1-6k\,;\,3-19k)\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

On cherche les couples d'entiers $(x\,;\,y)$ solutions de l'équation (E) et vérifiant $2\,000 \leqslant x \leqslant 2\,100$, ce qui revient à chercher k de $\mathbb{Z}$ tel que $2\,000 \leqslant 1-6k \leqslant 2\,100$ autrement dit $1\,999 \leqslant -6k \leqslant 2\,099$ ou encore $-\dfrac{2\,099}{6} \leqslant k \leqslant -\dfrac{1\,999}{6}$.

$-\dfrac{2\,099}{6} \approx -349,8$ et $-\dfrac{1\,999}{6} \approx -332,2$ et comme k est entier, on a $-349 \leqslant k \leqslant -334$ ce qui fait 16 valeurs de k donc 16 couples solutions de (E) vérifiant la condition imposée.

2. Soit n un entier naturel.

Un nombre d qui divise deux nombres a et b divise toute combinaison linéaire de ces deux nombres.

Soit d un diviseur commun à $(n+3)$ et $(2n+3)$, alors d divise $(2(n+3)-(2n+3))$ donc d divise 3. Les seuls diviseurs communs possibles de $(n+3)$ et $(2n+3)$ sont donc les diviseurs de 3, c'est-à-dire 1 et 3.

- Si n est multiple de 3, alors $2n+3$ et $n+3$ sont aussi multiples de 3 donc les deux nombres $(n+3)$ et $(2n+3)$ ne sont pas premiers entre eux.
- Si n n'est pas multiple de 3, alors n s'écrit $3q+r$ avec $r=1$ ou $r=2$.
  - $2n+3 = 2(3q+r)+3 = 3(2q+1)+2r$ n'est pas multiple de 3.
  - $n+3 = 3q+r+3 = 3(q+1)+r$ n'est pas multiple de 3.

  3 n'est pas un diviseur commun à $(n+3)$ et $(2n+3)$ donc le seul autre diviseur commun possible est 1 ce qui prouve que $(n+3)$ et $(2n+3)$ sont premiers entre eux.

On a donc démontré que les entiers $(2n+3)$ et $(n+3)$ sont premiers entre eux si et seulement si n n'est pas un multiple de 3.

Annexe

À rendre avec la copie