DNB, Métropole, correction, mathématiques

jeudi 28 juin 2012

Activités numériques, 12 points

Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf si une indication contraire est donnée.

Exercice n° 1

1. Alice participe à un jeu télévisé. Elle a devant elle trois portes fermées. Derrière l'une des portes, il y a une voiture ; derrière les autres, il n'y a rien.
   Alice doit choisir l'une de ces portes. Si elle choisit la porte derrière laquelle il y a la voiture, elle gagne cette voiture.
   Alice choisit au hasard une porte. La probabilité qu'elle gagne la voiture est de une chance sur trois, donc égale $\frac{1}{3}$.
   Réponse **b.**
2. S'il y a quatre portes au lieu de trois et toujours une seule voiture à gagner, la probabilité qu'elle gagne la voiture est de une chance sur quatre, donc égale $\frac{1}{4}$.
   La probabilité qu'a Alice de gagner la voiture diminue donc.
   Réponse **b.**

Exercice n° 2

1. Écriture décimale du nombre $\frac{10^5+1}{10^5}$:

$$\frac{10^5+1}{10^5} = \frac{100001}{100000} = 1,00001$$

2. Antoine utilise sa calculatrice pour calculer le nombre suivant : $\frac{10^5+1}{10^5}$. Le résultat affiché est 1.
   Antoine pense que ce résultat n'est pas exact. Il a raison, la calculatrice a arrondi.

Exercice n° 3

Lors d'un marathon, un coureur utilise sa montre-chronomètre. Après un kilomètre de course, elle lui indique qu'il court depuis quatre minutes et trente secondes. Soit $4 \times 60" + 30" = 270"$.
La longueur officielle d'un marathon est de 42,195 km. Soit $270" \times 42,195 = 11392"65/100$.

$$\begin{array}{r|l} 11392{,}65 & 60{,}00 \\ \cline{2-2} 53926 & 189 \\ 59265 & \\ 5265 & \end{array} \quad \text{soit } 189'52"65/100 \qquad \begin{array}{r|l} 189 & 60 \\ \cline{2-2} 9 & 3 \end{array} \quad \text{soit } 3^{\text{h}}9'52"65/100$$

Si le coureur garde cette allure tout au long de sa course, il mettra donc moins de 3 h 30 pour effectuer le marathon.

Exercice n° 4

On cherche à résoudre l'équation $(4x-3)^2-9=0$.

1. Le nombre $\dfrac{3}{4}$ n'est pas solution de cette équation :

$$(4\times\frac{3}{4}-3)^2-9=(3-3)^2-9=-9\neq 0$$

   Le nombre 0 est solution de cette équation :

$$(4\times 0-3)^2-9=(0-3)^2-9=9-9=0$$

2. Pour tout nombre x :

$$(4x-3)^2-9=(4x-3)^2-3^2=(4x-3+3)(4x-3-3)=4x(4x-6)$$

3. Solutions de l'équation $(4x-3)^2-9=0$:
   Un produit est nul si et seulement si l'un de ses termes est nul, ainsi :

$$(4x-3)^2-9=4x\times(4x-6)=0 \iff 4x=0 \text{ ou } 4x-6=0 \iff x=0 \text{ ou } x=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

   L'équation admet donc deux solutions : $x=0$ et $x=\dfrac{3}{2}$.

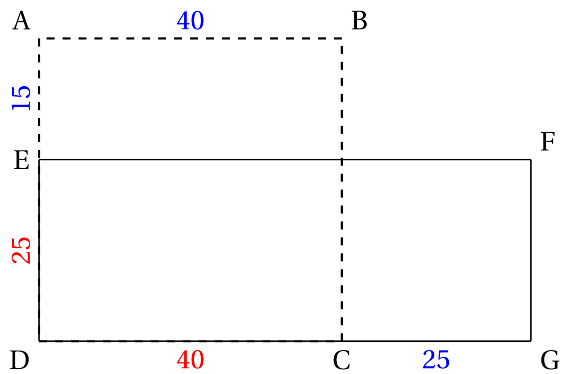
Activités géométriques, 12 points

Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf si une indication contraire est donnée.

Exercice n° 1

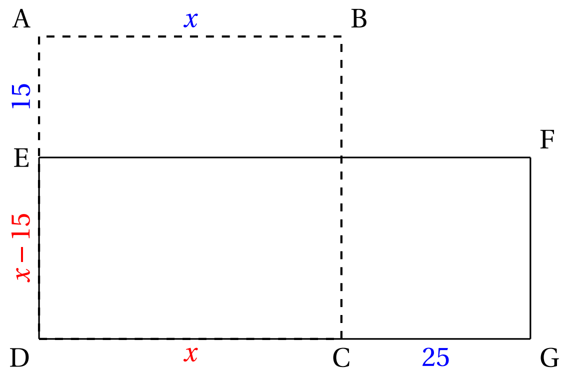
Le dessin ci-dessous représente une figure composée d'un carré ABCD et d'un rectangle DEFG.
E est un point du segment [AD].
C est un point du segment [DG].
Dans cette figure la longueur AB peut varier mais on a toujours : AE = 15 cm et CG = 25 cm.

1. Dans cette question on suppose que : AB = 40 cm
   a) Aire du carré ABCD : $\mathscr{A}_{\text{ABCD}}=\text{AB}^2=40^2=1600\text{ cm}^2$.
   b) Aire du rectangle DEFG :
   D, E et A sont alignés dans cet ordre, donc : DE = DA − AE = AB − AE = 40 − 15 = 25 cm.
   D, C et G sont alignés dans cet ordre, donc : DG = DC + CG = AB + CG = 40 + 25 = 65 cm.
   Ainsi : $\mathscr{A}_{\text{DEFG}}=\text{DE}\times\text{DG}=25\times 65=1625\text{ cm}^2$.



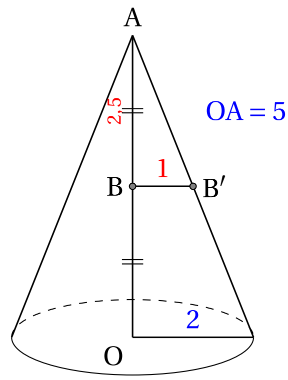
2. En procédant de la même manière que précédemment, on obtient : $DE = x - 15$ et $DG = x + 25$.
   L'aire du rectangle DEFG est égale à : $(x-15)(x+25) = x^2 + 10x - 375$.
   Afin que l'aire du carré ABCD soit égale à l'aire du rectangle DEFG, il faut et il suffit que :

$$x^2 = x^2 + 10x - 375 \iff 10x - 375 = 0 \iff x = \frac{375}{10} = 37,5$$



Exercice n° 2

On considère un cône de révolution de hauteur 5 cm et dont la base a pour rayon 2 cm. Le point A est le sommet du cône et O le centre de sa base. B est le milieu de [AO], donc $AB = 2,5$cm..



1. Volume du cône en cm^3 :

$$V = \frac{\pi R^2 \times OA}{3} = \frac{\pi 2^2 \times 5}{3} = \frac{20\pi}{3} \simeq 21\text{cm}^3$$

2. On effectue la section du cône par le plan parallèle à la base qui passe par B. On obtient ainsi un petit cône de volume V′.
   Le théorème de Thalès nous donne :

$$\frac{AB}{AO} = \frac{1}{2} = \frac{BB'}{R} \iff BB' = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

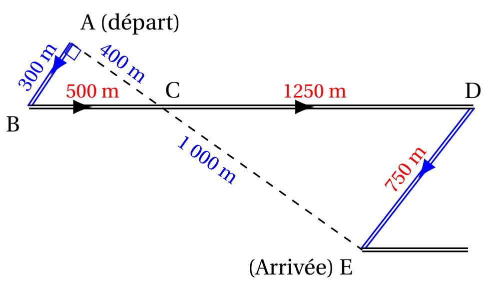
$$V' = \frac{\pi \times BB'^2 \times AB}{3} = \frac{\pi \times 1^2 \times 2,5}{3} = \frac{2,5\pi}{3} = \frac{\frac{20}{8}\pi}{3} = \frac{1}{8}V$$

Le volume du petit cône, égal à $\frac{1}{8}$ du volume du cône initial, n'est donc pas égal à la moitié du cône initial.

Exercice n° 3

Des élèves participent à une course à pied. Avant l'épreuve, un plan leur a été remis.
Il est représenté par la figure ci-contre.
On convient que :

- Les droites (AE) et (BD) se coupent en C.
- Les droites (AB) et (DE) sont parallèles.
- ABC est un triangle rectangle en A.



Calcul de la longueur réelle du parcours ABCDE :

- Longueur BC :

Dans le triangle ABC rectangle en A, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 \iff \mathrm{BC}^2 = 300^2 + 400^2 = 250000 \iff \mathrm{BC} = \sqrt{250000} = 500$$

- Longueur CD :
  Les droites (AE) et (BD) se coupent en C et les droites (AB) et (DE) sont parallèles. Le théorème de Thalès permet d'écrire :
  $$\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{CD}} = \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CE}} \iff \frac{500}{\mathrm{CD}} = \frac{400}{1000} \iff \mathrm{CD} = \frac{1000 \times 500}{400} = 1250$$
- Longueur DE :
  Les droites (AE) et (BD) se coupent en C et les droites (AB) et (DE) sont parallèles. Le théorème de Thalès permet d'écrire :
  $$\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CE}} = \frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{DE}} \iff \frac{400}{1000} = \frac{300}{\mathrm{DE}} \iff \mathrm{DE} = \frac{1000 \times 300}{400} = 750$$
- Longueur ABCDE :

$$\ell(\mathrm{ABCDE}) = \mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CD} + \mathrm{DE} = 300 + 500 + 1250 + 750 = 2800$$

Problème 12 points

PARTIE 1

1. L'avion décolle chaque matin à 9 h 35 de Nantes et atterrit à 10 h 30 à Toulouse.
   La durée du vol est : 10h30−9h35=0h55, soit 55 minutes.
2. Le tableau suivant donne le nombre de passagers qui ont emprunté ce vol pendant la première semaine de mise en service. L'information concernant le mercredi a été perdue.

Jour	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche	**Total**
Nombre de passagers	152	143	145	164	189	157	163	1 113

   a) Le nombre de passagers ayant emprunté ce voile mercredi est

   $$1113 - 152 - 143 - 164 - 189 - 157 - 163 = 145$$

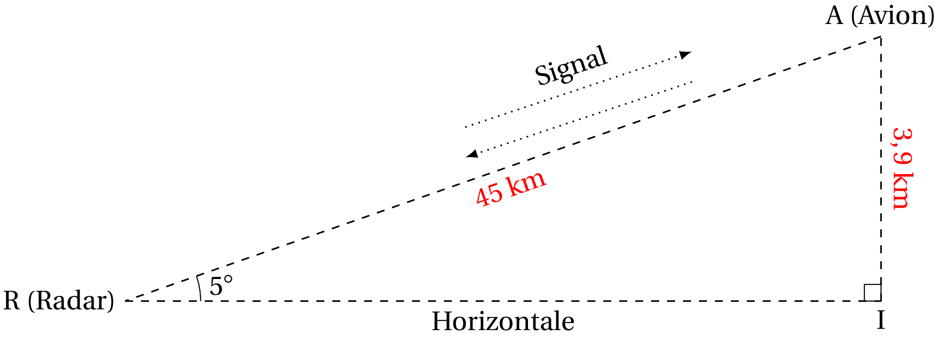
   b) Il y avait en moyenne $\overline{m} = \dfrac{1113}{7} = 159$ passagers par jour dans l'avion cette semaine là.

3. À partir du mois de Février, on décide d'étudier la fréquentation de ce vol pendant douze semaines. La compagnie utilise une feuille de calcul indiquant le nombre de passagers par jour. Cette feuille de calcul est donnée en **ANNEXE**.
   a) Formule saisie dans la cellule `I2` pour obtenir le nombre total de passagers au cours de la semaine 1 : `=SOMME(B2:H2)`.
   b) Formule saisie dans la cellule J2 pour obtenir le nombre moyen de passagers par jours au cours de la semaine 1 `=MOYENNE(B2:H2)`.
4. Le nombre moyen de passagers par jour au cours de ces douze semaines est égal à 166.
   Les 80% de la capacité maximale de l'avion (190) correspondent à : $\dfrac{80}{100} \times 190 = 152$. L'objectif est atteint, puisque on a 166 (>152) passagers en moyenne sur les 12 semaines.

PARTIE 2

Quand l'avion n'est plus très loin de l'aéroport de Toulouse, le radar de la tour de contrôle émet un signal bref en direction de l'avion. Le signal atteint l'avion et revient au radar 0,000 3 secondes après son émission.

1. Le signal est émis à la vitesse de 300 000 kilomètres par seconde.
   Le signal met donc $\dfrac{0,0003}{2} = 0,00015\text{s}$ pour aller à l'avion.
   On utilise la formule $d = \text{V}t$, où d est la distance parcourue, t le temps mis pour la parcourir et V la vitesse de parcours.
   $$d = \text{V}t = 300\,000\,\text{km/s} \times 0,000\,15\,\text{s} = 45\,\text{km}$$



2. La direction radar-avion fait un angle de 5° avec l'horizontale.
   L'altitude de l'avion à cet instant :
   $$\sin\widehat{\text{ARI}} = \frac{\text{AI}}{\text{AR}} \iff \sin 5^\circ = \frac{\text{AI}}{45} \iff \text{AI} = 45 \times \sin 5^\circ \simeq 3,9\,\text{km à 100 m près}$$

PARTIE 3

En phase d'atterrissage, à partir du moment où les roues touchent le sol, l'avion utilise ses freins jusqu'à l'arrêt complet. Le graphique en ANNEXE représente la distance parcourue par l'avion sur la piste (en mètres) en fonction du temps (en secondes) à partir du moment où les roues touchent le sol. En utilisant ce graphique, répondre aux questions suivantes :

1. La distance parcourue par l'avion 10 s après avoir touché le sol est de 450 m.
2. Au bout de 22 s et au bout de 26 s la distance parcourue depuis le début de l'atterrissage est la même, car l'avion doit être à l'arrêt.
3. À partir du moment où les roues touchent le sol, l'avion met 20 secondes pour s'arrêter.

ANNEXE

Problème Partie 1

			=MOYENNE(J12 J13)							
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		lundi	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi	dimanche	TOTAL	MOYENNE
2	Semaine 1	157	145	142	159	190	156	161	1110	159
3	Semaine 2	147	158	156	141	141	152	155	1050	150
4	Semaine 3	153	148	162	149	160	146	163	1081	154
5	Semaine 4	168	156	162	157	166	158	161	1128	161
6	Semaine 5	163	169	170	162	167	169	162	1162	166
7	Semaine 6	156	167	171	173	165	165	162	1159	166
8	Semaine 7	173	172	168	173	161	162	167	1176	168
9	Semaine 8	168	166	170	173	168	176	165	1186	169
10	Semaine 9	176	175	175	171	172	178	173	1220	174
11	Semaine 10	185	176	172	180	185	171	171	1240	177
12	Semaine 11	178	181	183	172	178	172	173	1237	177
13	Semaine 12	171	183	171	184	172	176	173	1230	176
14							moyenne sur trois mois :			166

Problème Partie 3