Baccalauréat ES/L Amérique du Sud
25 novembre 2015

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.
Les probabilités demandées seront données à $0,001$ *près.*

Une étude est menée par une association de lutte contre la violence routière. Des observateurs, sur un boulevard d'une grande ville, se sont intéressés au comportement des conducteurs d'automobile au moment de franchir un feu tricolore.

Partie A

Dans cette partie, on s'intéresse au respect de la signalisation par les automobilistes.

Sur un cycle de deux minutes (120 secondes), le feu est à la couleur « rouge » pendant 42 secondes, « orange » pendant 6 secondes et « vert » pendant 72 secondes.
Par ailleurs, les observateurs notent que les comportements diffèrent selon la couleur du feu :

- lorsque le feu est rouge, 10 % des conducteurs continuent de rouler et les autres s'arrêtent ;
- lorsque le feu est orange, 86 % des conducteurs continuent de rouler et les autres s'arrêtent ;
- lorsque le feu est vert, tous les conducteurs continuent de rouler.

On s'intéresse à un conducteur pris au hasard, et on observe son comportement selon la couleur du feu. On note :

- R l'évènement « le feu est au rouge » ;
- O l'évènement « le feu est à l'orange » ;
- V l'évènement « le feu est au vert » ;
- C l'évènement « le conducteur continue de rouler ».

Pour tout évènement A, on note $p(A)$ sa probabilité, $p_B(A)$ la probabilité de A sachant que B est réalisé et $\overline{A}$ l'évènement contraire de A.

1. Modéliser cette situation par un arbre pondéré.
2. Montrer que la probabilité que le conducteur continue de rouler au feu est $0,678$.
3. Sachant qu'un conducteur continue de rouler au feu, quelle est la probabilité que le feu soit vert ?

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse au trafic aux heures de pointe.

On désigne par X la variable aléatoire qui compte le nombre de voitures par heure à proximité du feu évoqué dans la partie A.
On admet que X suit la loi normale de moyenne 3 000 et d'écart type 150.

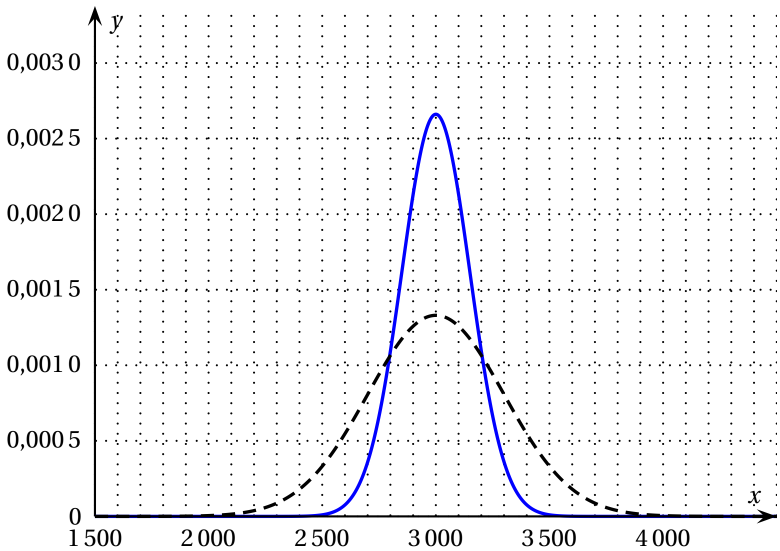
1. À l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité de compter entre 2 800 et 3 200 voitures par heure à cet endroit.
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité de compter plus de 3 100 voitures par heure à cet endroit.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   À un autre endroit du boulevard, à proximité d'un pont, la variable aléatoire Y qui compte le nombre de voitures par heure suit la loi normale de moyenne 3 000 et d'écart type σ strictement supérieur à 150.

   Sur le graphique ci-dessous, la courbe correspondant à X est en traits pleins et la courbe correspondant à Y est en pointillés.

   Déterminer à quel endroit du boulevard, à proximité du feu ou du pont, la probabilité qu'il passe en une heure, entre 2 800 et 3 200 voitures, est la plus grande. Justifier à l'aide du graphique.



EXERCICE 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

Les deux parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

La fonction f est définie pour tout réel x élément de l'intervalle $[1\,;\,7]$ par :

$$f(x) = 1,5x^3 - 9x^2 + 24x + 48.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' sa dérivée seconde sur $[1\,;\,7]$.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,7]$:
   a. Calculer $f'(x)$.
   b. Calculer $f''(x)$.
2. Déterminer sur quel intervalle la fonction f est convexe.

Partie B

Une entreprise fabrique et commercialise un article dont la production est comprise entre 1 000 et 7 000 articles par semaine.
On modélise le coût de fabrication, exprimé en milliers d'euros, par la fonction f définie dans la partie A où x désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués.

On note c la fonction définie sur $[1\,;\,7]$ représentant le coût moyen par article fabriqué, exprimé en euros. On a, par conséquent, pour tout x de $[1\,;\,7]$:

$$c(x) = \frac{f(x)}{x} = 1,5x^2 - 9x + 24 + \frac{48}{x}.$$

On admet que la fonction c est dérivable sur $[1\,;\,7]$. On note c' sa fonction dérivée.

1. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[1\,;\,7]$, on a :

$$c'(x) = \frac{3(x-4)\left(x^2+x+4\right)}{x^2}.$$

2. **a.** Étudier les variations de la fonction c sur l'intervalle $[1\,;\,7]$.

b. Déterminer, en milliers, le nombre d'articles à fabriquer pour que le coût moyen par article soit minimal.

3. On considère la fonction Γ définie sur l'intervalle $[1\,;\,7]$ par :

$$\Gamma(x) = 0,5x^3 - 4,5x^2 + 24x + 1 + 48\ln x.$$

a. Montrer que Γ est une primitive de c sur l'intervalle $[1\,;\,7]$.

b. Calculer la valeur moyenne μ de c sur l'intervalle $[1\,;\,7]$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2}.

EXERCICE 3 — 5 points

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité, de la série L

Claudine est une passionnée de lecture abonnée à l'hebdomadaire littéraire « La Lecture ». Elle se rend une fois par semaine à la bibliothèque et elle demande ou non l'avis du bibliothécaire sur le livre mis en valeur dans l'hebdomadaire « La Lecture ».
Son souhait de demander un avis change d'une semaine sur l'autre selon le plaisir qu'elle a eu à lire le livre et selon la pertinence du conseil donné par le bibliothécaire la semaine précédente.
La première semaine, on suppose que la probabilité que Claudine demande un avis vaut $0,1$.
Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note a_n la probabilité que Claudine demande un avis la n-ième semaine. On a ainsi $a_1 = 0,1$.

On admet que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on a :

$$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,4.$$

1. Calculer la probabilité a_2 que Claudine demande un avis la deuxième semaine.

2. Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on définit la suite (v_n) par :

$$v_n = a_n - 0,8.$$

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,5$.
Préciser son premier terme v_1.

b. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on a :

$$a_n = 0,8 - 0,7 \times 0,5^{n-1}.$$

c. Déterminer la limite de la suite (v_n).

d. En déduire la limite de la suite (a_n). Interpréter ce résultat.

3. On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES :	A est un réel N est un entier naturel L est un réel strictement compris entre 0,1 et 0,8
INITIALISATION :	A prend la valeur 0,1 N prend la valeur 1
TRAITEMENT :	Tant que $A \leqslant L$ N prend la valeur $N+1$ A prend la valeur $0,5 \times A + 0,4$ Fin du Tant que
SORTIE :	Afficher N

a. Pour la valeur $L = 0,7$, recopier et compléter autant que nécessaire les colonnes du tableau suivant :

Valeur de N	1	2	…	
Valeur de A	0,1		…	
Condition $A \leqslant L$	vraie		…	

b. En déduire l'affichage de N obtenu en sortie d'algorithme quand la valeur de L est 0,7.

c. Dans le contexte de cet exercice, expliquer comment on peut interpréter le nombre N obtenu en sortie de l'algorithme quand le nombre L est compris strictement entre 0,1 et 0,8.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer le nombre de semaines à partir duquel la probabilité que Claudine demande un avis soit supérieure à 0,799.

EXERCICE 3 — 5 points

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Claudine est une passionnée de lecture abonnée à l'hebdomadaire littéraire « La Lecture ». Elle se rend une fois par semaine à la bibliothèque et demande ou non l'avis de la bibliothécaire sur le livre mis en valeur dans l'hebdomadaire « La Lecture ».
Lorsque Claudine demande à la bibliothécaire son avis, la probabilité qu'elle le demande de nouveau la semaine suivante est 0,9.
Lorsque Claudine ne demande pas à la bibliothécaire son avis, la probabilité qu'elle ne le demande pas non plus la semaine suivante est 0,6.
La première semaine, on suppose que la probabilité que Claudine demande un avis vaut 0,1.
Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note :

- a_n la probabilité que Claudine demande un avis à la bibliothécaire la n-ième semaine ;
- b_n, la probabilité que Claudine ne demande pas d'avis à la bibliothécaire la n-ième semaine ;
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste la n-ième semaine.

On a ainsi $a_1 = 0,1$ et $b_1 = 0,9$.

1. a. Illustrer la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B : A représente l'état « Claudine demande un avis à la bibliothécaire » ; B représente l'état « Claudine ne demande pas d'avis à la bibliothécaire ».

b. Indiquer la matrice de transition M associée à ce graphe. On prendra les sommets A et B dans l'ordre (A, B).

2. Montrer que l'on a $P_2 = \begin{pmatrix}0,45 & 0,55\end{pmatrix}$.

3. a. Montrer que l'état stable de la répartition du choix de la demande d'avis est $P = \begin{pmatrix}0,8 & 0,2\end{pmatrix}$.

b. Interpréter ce résultat.

4. On admet que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on a :

$$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,4.$$

On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES :	A est un réel et N est un entier naturel
INITIALISATION :	A prend la valeur $0,1$ N prend la valeur 1
TRAITEMENT :	Tant que $A \leqslant 0,79$ N prend la valeur $N+1$ A prend la valeur $0,5 \times A + 0,4$ Fin du Tant que
SORTIE :	Afficher N

Préciser ce que cet algorithme permet d'obtenir. (On ne demande pas de donner la valeur de N affichée en sortie d'algorithme.)

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

On admet que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on a :

$$a_n = 0,8 - 0,7 \times 0,5^{n-1}.$$

Déterminer le nombre de semaines à partir duquel la probabilité que Claudine demande un avis soit supérieure à $0,799$.

EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte. Recopier le numéro de la question et la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Les probabilités sont données à $0,001$ *près.*

Pour la fête du village de Boisjoli, le maire a invité les enfants des villages voisins.
Les services de la mairie ayant géré les inscriptions dénombrent 400 enfants à cette fête ; ils indiquent aussi que 32 % des enfants présents sont des enfants qui habitent le village de Boisjoli.

1. Le nombre d'enfants issus des villages voisins est :

a. 128 **b.** 272 **c.** 303 **d.** 368

Lors de cette fête, huit enfants sont choisis au hasard afin de former une équipe qui participera à un défi sportif. On admet que le nombre d'enfants est suffisamment grand pour que cette situation puisse être assimilée à un tirage au hasard avec remise.

On appelle X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre d'enfants de l'équipe habitant le village de Boisjoli.

2. La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres :

a. $n = 400$ et $p = 0,32$ **b.** $n = 8$ et $p = 0,32$
c. $n = 400$ et $p = 8$ **d.** $n = 8$ et $p = 0,68$

3. La probabilité que dans l'équipe il y ait au moins un enfant habitant le village de Boisjoli est :

a. 0,125 **b.** 0,875 **c.** 0,954 **d.** 1

4. L'espérance mathématique de X est :

a. 1,740 8 **b.** 2,56 **c.** 87,04 **d.** 128