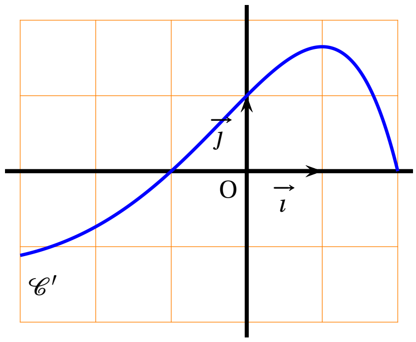
∽ Baccalauréat S Métropole 21 juin 2012 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$.
On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$.
- la dérivée f' de la fonction f admet la courbe représentative $\mathscr{C}'$ ci -dessous.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3, -1]$, $f'(x) \leqslant 0$.
2. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 2]$.
3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$, $f(x) \geqslant -1$.
4. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
   La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$.

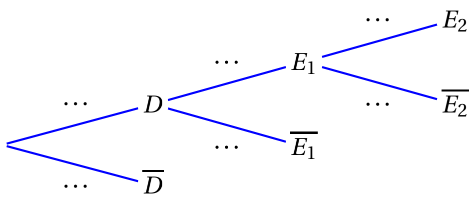
EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier. 40 % des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat.
   On considère les évènements suivants :
   — D : « Le candidat est retenu sur dossier »,
   — E_1 : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,
   — E_2 : « Le candidat est recruté ».

   a. Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.

   b. Calculer la probabilité de l'évènement E_1.

   c. On note F l'évènement « Le candidat n'est pas recruté ».
   Démontrer que la probabilité de l'évènement F est égale à $0{,}93$.

2. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à $0,07$.

On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.

a. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

b. Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à 10^{-3}.

3. Quel est le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à $0,999$?

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Il est possible de traiter la partie C sans avoir traité la partie B.

Partie A

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1~;~+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$.

Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier strictement positif par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	i et n sont des entiers naturels.
	u est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à u la valeur 0.
Traitement :	Pour i variant de 1 à n.
	Affecter à u la valeur $u + \dfrac{1}{i}$
Sortie :	Afficher u.

Donner la valeur exacte affichée par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur $n = 3$.

2. Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de n.

3. Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondis à 10^{-3}.

n	4	5	6	7	8	9	10	100	1 000	1 500	2 000
u_n	0,697	0,674	0,658	0,647	0,638	0,632	0,626	0,582	0,578	0,578	0,577

À l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variation de la suite (u_n) et son éventuelle convergence.

Partie C

Cette partie peut être traitée indépendamment de la partie B.
Elle permet de démontrer les conjectures formulées à propos de la suite (u_n) telle que pour tout entier strictement positif n,

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1. Démontrer que pour tout entier strictement positif n,

$$u_{n+1} - u_n = f(n)$$

où f est la fonction définie dans la partie A.
En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

2. **a.** Soit k un entier strictement positif.
Justifier l'inégalité $\displaystyle\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \geqslant 0$.
En déduire que $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}$.
Démontrer l'inégalité $\ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$ (1).

b. Écrire l'inégalité (1) en remplaçant successivement k par 1, 2, …, n et démontrer que pour tout entier strictement positif n,

$$\ln(n+1) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

c. En déduire que pour tout entier strictement positif n, $u_n \geqslant 0$.

3. Prouver que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite.

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On appelle f l'application qui à tout point M d'affixe z différente de -1, fait correspondre le point M' d'affixe $\dfrac{1}{z+1}$.
Le but de l'exercice est de déterminer l'image par f de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$.

1. Soient A, B et C les points d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = -\frac{1}{2}, \quad z_{\mathrm{B}} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{C}} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

a. Placer les trois points A, B et C sur une figure que l'on fera sur la copie en prenant 2 cm pour unité graphique.

b. Calculer les affixes des points $\mathrm{A}' = f(\mathrm{A})$, $\mathrm{B}' = f(\mathrm{B})$ et $\mathrm{C}' = f(\mathrm{C})$ et placer les points A', B'et C' sur la figure.

c. Démontrer que les points A', B' et C' ne sont pas alignés.

2. Soit g la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M_1 d'affixe $z+1$.

a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g.

b. Sans donner d'explication, placer les points A_1, B_1 et C_1, images respectives par g de A, B et C et tracer la droite $\mathcal{D}_1$, image de la droite $\mathcal{D}$ par g.

c. Démontrer que $\mathcal{D}_1$ est l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-1| = |z|$.

3. Soit h l'application qui, à tout point M d'affixe z non nulle, associe le point M_2 d'affixe $\dfrac{1}{z}$.
   a. Justifier que $h(\text{A}_1) = \text{A}'$, $h(\text{B}_1) = \text{B}'$ et $h(\text{C}_1) = \text{C}'$.
   b. Démontrer que, pour tout nombre complexe non nul z, on a :
   $$\left|\frac{1}{z} - 1\right| = 1 \iff |z-1| = |z|.$$
   c. En déduire que l'image par h de la droite $\mathscr{D}_1$ est incluse dans un cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer ce cercle sur la figure.
   On admet que l'image par h de la droite $\mathscr{D}_1$ est le cercle $\mathscr{C}$ privé de O.
4. Déterminer l'image par l'application f de la droite $\mathscr{D}$.

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = -1+\text{i}, \quad z_{\text{B}} = 2\text{i} \quad \text{et} \quad z_{\text{C}} = 1+3\text{i}.$$

et $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x+2$.

1. Prouver que les points A, B et C appartiennent à la droite $\mathscr{D}$.
   Sur une figure que l'on fera sur la copie en prenant 2 cm pour unité graphique, placer les points A, B, C et tracer la droite $\mathscr{D}$.
2. Résoudre l'équation $(1+\text{i})z+3-\text{i} = 0$ et vérifier que la solution de cette équation est l'affixe d'un point qui n'appartient pas à la droite $\mathscr{D}$.

   Dans la suite de l'exercice, on appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z différente de $-1+2\text{i}$, fait correspondre le point M' d'affixe $\dfrac{1}{(1+\text{i})z+3-\text{i}}$.

   Le but de l'exercice est de déterminer l'image par f de la droite $\mathscr{D}$.

3. Soit g la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M_1 d'affixe $(1+\text{i})z+3-\text{i}$.
   a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g.
   b. Calculer les affixes des points A_1, B_1 et C_1, images respectives par g des points A, B et C.
   c. Déterminer l'image $\mathscr{D}_1$ de la droite $\mathscr{D}$ par la transformation g et la tracer sur la figure.
4. Soit h l'application qui, à tout point M d'affixe z non nulle, fait correspondre le point M_2 d'affixe $\dfrac{1}{z}$.
   a. Déterminer les affixes des points $h(\text{A}_1)$, $h(\text{B}_1)$ et $h(\text{A}_1)$ et placer ces points sur la figure.
   b. Démontrer que, pour tout nombre complexe non nul z, on a :
   $$\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \iff |z-2| = |z|.$$
   c. En déduire que l'image par h de la droite $\mathscr{D}_1$ est incluse dans un cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer ce cercle sur la figure.
   d. Démontrer que tout point du cercle $\mathscr{C}$ qui est distinct de O est l'image par h d'un point de la droite $\mathscr{D}_1$.
5. Déterminer l'image par l'application f de la droite $\mathscr{D}$.