Durée : 4 heures

Baccalauréat S Métropole–La Réunion 13 septembre 2019

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Lors d'un examen professionnel, chaque candidat doit présenter un dossier de type A ou un dossier de type B; 60 % des candidats présentent un dossier de type A, les autres présentant un dossier de type B.
Le jury attribue à chaque dossier une note comprise entre 0 et 20. Un candidat est reçu si la note attribuée à son dossier est supérieure ou égale à 10.
On choisit au hasard un dossier.
On admet qu'on peut modéliser la note attribuée à un dossier de type A par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance 11,3 et d'écart-type 3, et la note attribuée à un dossier de type B par une variable aléatoire Y suivant la loi normale d'espérance $12,4$ et d'écart type $4,7$.
On pourra noter A l'évènement : « le dossier est un dossier de type A », B l'évènement : « le dossier est un dossier de type B », et R l'évènement : « le dossier est celui d'un candidat reçu à l'examen ».
Les probabilités seront arrondies au centième.

1. Le dossier choisi est de type A. Quelle est la probabilité que ce dossier soit celui d'un candidat reçu à l'examen ? On admet que la probabilité que le dossier choisi, sachant qu'il est de type B, soit celui d'un candidat reçu est égale à $0,70$.
2. Montrer que la probabilité, arrondie au centième, que le dossier choisi soit celui d'un candidat reçu à l'examen est égale à $0,68$.
3. Le jury examine 500 dossiers choisis aléatoirement parmi les dossiers de type B. Parmi ces dossiers, 368 sont ceux de candidats reçus à l'examen.

   Un membre du jury affirme que cet échantillon n'est pas représentatif. Il justifie son affirmation en expliquant que dans cet échantillon, la proportion de candidats reçus est trop grande.

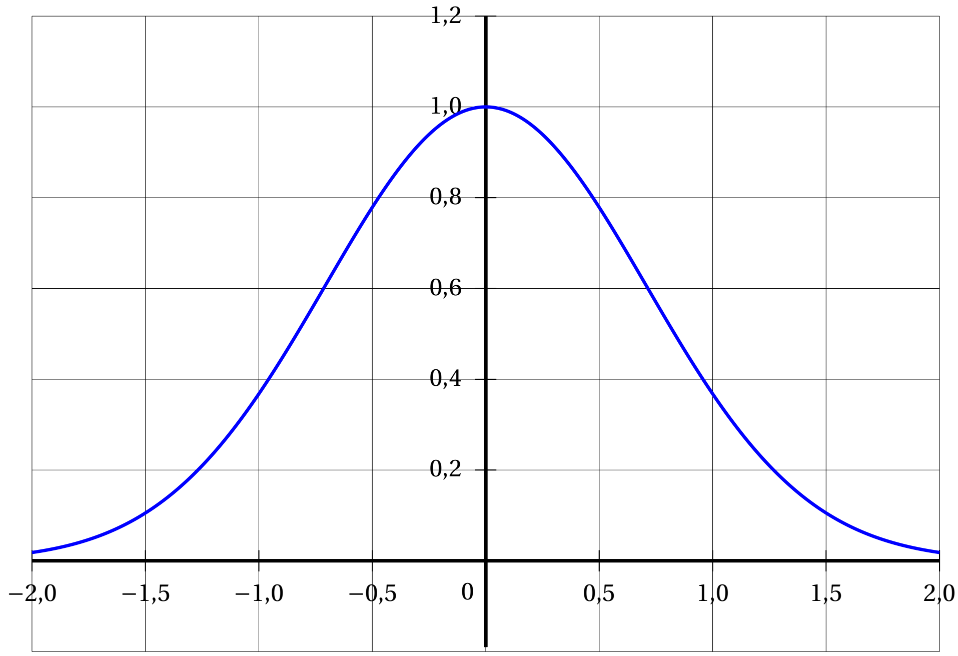
   Quel argument peut-on avancer pour confirmer ou contester ses propos ?
4. Le jury décerne un « prix du jury » aux dossiers ayant obtenu une note supérieure ou égale à N, où N est un nombre entier. La probabilité qu'un dossier choisi au hasard obtienne le « prix du jury » est comprise entre $0,10$ et $0,15$.

   Déterminer le nombre entier N.

Exercice 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathscr{C}_g$ dans un repère orthogonal d'une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}$. La courbe $\mathscr{C}_g$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et se situe dans le demi-plan $y > 0$.



Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on pose :

$$G(t) = \int_0^t g(u)\,\mathrm{d}u.$$

Partie A

Les justifications des réponses aux questions suivantes pourront s'appuyer sur des considérations graphiques.

1. La fonction G est-elle croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$? Justifier.
2. Justifier graphiquement l'inégalité $G(1) \leqslant 0,9$.
3. La fonction G est-elle positive sur $\mathbb{R}$? Justifier.

Dans la suite du problème, la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(u) = \mathrm{e}^{-u^2}$.

Partie B

1. Étude de g
   - **a.** Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.
   - **b.** Calculer la fonction dérivée de g et en déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
   - **c.** Préciser le maximum de g sur $\mathbb{R}$. En déduire que $g(1) \leqslant 1$.
2. On note E l'ensemble des points M situés entre la courbe $\mathscr{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. On appelle I l'aire de cet ensemble.

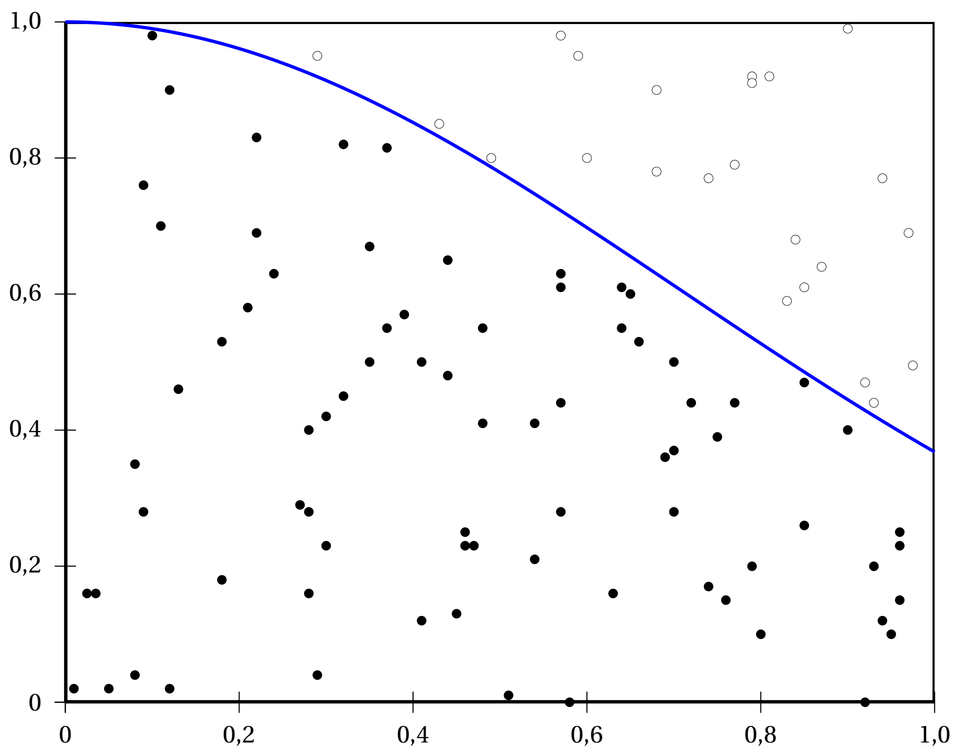
   On rappelle que :

   $$I = G(1) = \int_0^1 g(u)\,\mathrm{d}u.$$

   On souhaite estimer l'aire I par la méthode dite « de Monte-Carlo » décrite ci-dessous.

- On choisit un point $M(x~;~y)$ en tirant au hasard de façon indépendante ses coordonnées x et y selon la loi uniforme sur l'intervalle $[0~;~1]$. On admet que la probabilité que le point M appartienne à l'ensemble E est égale à I.
- On répète n fois l'expérience du choix d'un point M au hasard. On compte le nombre c de points appartenant à l'ensemble E parmi les n points obtenus.
- La fréquence $f = \dfrac{c}{n}$ est une estimation de la valeur de I.

a. La figure ci-dessous illustre la méthode présentée pour $n = 100$. Déterminer la valeur de f correspondant à ce graphique.



b. L'exécution de l'algorithme ci-dessous utilise la méthode de Monte-Carlo décrite précédemment pour déterminer une valeur du nombre f.
Recopier et compléter cet algorithme.

f, x et y sont des nombres réels, n, c et i sont des entiers naturels.
ALEA est une fonction qui génère aléatoirement un nombre compris entre 0 et 1.

$c \leftarrow 0$ Pour i variant de 1 à n faire : $\qquad\qquad x \leftarrow$ ALEA $\qquad\qquad y \leftarrow$ ALEA $\qquad$ Si $y \leqslant \ldots$ alors $\qquad\qquad c \leftarrow \ldots$ $\qquad$ fin Si fin Pour $\qquad\qquad\qquad f \leftarrow \ldots$

c. Une exécution de l'algorithme pour $n = 1\,000$ donne $f = 0,757$.
En déduire un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la valeur exacte de I.

Partie C

On rappelle que la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(u) = \mathrm{e}^{-u^2}$ et que la fonction G est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(t) = \int_0^t g(u)\,\mathrm{d}u.$$

On se propose de déterminer une majoration de $G(t)$ pour $t \geqslant 1$.

1. *Un résultat préliminaire.*

   On admet que, pour tout réel $u \geqslant 1$, on a $g(u) \leqslant \dfrac{1}{u^2}$.

   En déduire que, pour tout réel $t \geqslant 1$, on a :

$$\int_1^t g(u)\,\mathrm{d}u \leqslant 1 - \frac{1}{t}.$$

2. Montrer que, pour tout réel $t \geqslant 1$,

$$G(t) \leqslant 2 - \frac{1}{t}.$$

   Que peut-on dire de la limite éventuelle de $G(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?

Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Préciser si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

1. Soit m un nombre réel et soit l'équation (E) : $\quad 2z^2 + (m-5)z + m = 0$.

   a. Affirmation 1 :
   « Pour $m = 4$, l'équation (E) admet deux solutions réelles. »

   b. Affirmation 2 :
   « Il n'existe qu'une seule valeur de m telle que (E) admette deux solutions complexes qui soient des imaginaires purs. »

2. Dans le plan complexe, on considère l'ensemble S des points M d'affixe z vérifiant :

$$|z-6| = |z+5\mathrm{i}|.$$

   Affirmation 3 :

   « L'ensemble S est un cercle. »

3. On munit l'espace d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\imath}\,,\,\overrightarrow{\jmath}\,,\,\overrightarrow{k}\right)$. On note d la droite dont une représentation paramétrique est :

$$d : \left\{\begin{array}{l c l}x &=& -1+t\\ y &=& 2-t \\ z &=& 3+t\end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.$$

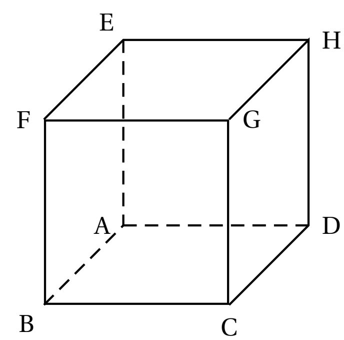
On note d' la droite passant par le point B$(4\,;\,4\,;-6)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(5\,;\,2\,;\,-9)$.

Affirmation 4 :

« Les droites d et d' sont coplanaires. »

4. On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous.

Affirmation 5 :
« Le vecteur $\overrightarrow{\text{DE}}$ est un vecteur normal au plan (ABG). »



Exercice 4 **5 points**
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par

$$f(x) = \frac{2+3x}{4+x}.$$

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

On admet que cette suite est bien définie.

1. Calculer u_1.

2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.

3. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3.$$

4. **a.** Montrer que la suite (u_n) est convergente.

b. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) ; montrer l'égalité :

$$\ell = \frac{2+3\ell}{4+\ell}$$

.

c. Déterminer la valeur de la limite ℓ.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = 0,1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = f\left(v_n\right).$$

1. On donne en **Annexe, à rendre avec la copie**, la courbe représentative, $\mathscr{C}_f$, de la fonction f et la droite D d'équation $y = x$.

   Placer sur l'axe des abscisses par construction géométrique les termes v_1, v_2 et v_3 sur l'**annexe, à rendre avec la copie**.

   Quelle conjecture peut-on formuler sur le sens de variation et le comportement de la suite (v_n) quand n tend vers l'infini ?

2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n,

$$1 - v_{n+1} = \left(\frac{2}{4 + v_n}\right)\left(1 - v_n\right).$$

   b. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

3. La suite (v_n) converge-t-elle ? Si oui, préciser sa limite.

Exercice 4 **5 points**
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Un laboratoire étudie l'évolution d'une population d'insectes parasites de plantes.
Cette évolution comporte deux stades : un stade larvaire et un stade adulte qui est le seul au cours duquel les insectes peuvent se reproduire.
L'observation de l'évolution de cette population conduit à proposer le modèle suivant.
Chaque semaine :

- Chaque adulte donne naissance à 2 larves puis 75 % des adultes meurent.
- 25 % des larves meurent et 50 % des larves deviennent adultes.

Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n le nombre de larves et a_n le nombre d'adultes au bout de n semaines.
Pour tout entier naturel n, on note X_n la matrice colonne définie par : $X_n = \begin{pmatrix} \ell_n \\ a_n \end{pmatrix}$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$ où A est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0,25 & 2 \\ 0,5 & 0,25 \end{pmatrix}.$$

2. On note U et V les matrices colonnes : $U = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}$, où a est un nombre réel.

a. Montrer que $AU = 1,25U$.

b. Déterminer le réel a tel que $AV = -0,75V$.

Dans les questions 3 et 4, le réel a est fixé de sorte qu'il est la solution de $AV = -0,75V$.

3. On admet qu'il existe deux nombres réels α et β tels que : $X_0 = \alpha U + \beta V$ et $\alpha > 0$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_n = \alpha(1,25)^n U + \beta(-0,75)^n V$.

b. En déduire que pour tout entier naturel n : $\left\{\begin{array}{l c r} \ell_n & = & 2(1,25)^n\left(\alpha - \beta(-0,6)^n\right)\\ a_n & = & (1,25)^n\left(\alpha + \beta(-0,6)^n\right).\end{array}\right.$

4. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ell_n}{a_n} = 2$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

1. On considère l'équation (E) : $19x - 6y = 1$. Déterminer le nombre de couples d'entiers $(x\ ;\ y)$ solutions de l'équation (E) et vérifiant $2\,000 \leqslant x \leqslant 2\,100$.

2. Soit n un entier naturel. Montrer que les entiers $(2n+3)$ et $(n+3)$ sont premiers entre eux si et seulement si n n'est pas un multiple de 3.

Annexe

À rendre avec la copie