Devoir commun - mars 2014

Durée : 3 heures
L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Tous les exercices doivent être traités.
Dans chaque exercice, on peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à justifier tous les résultats avancés.

Exercice 1 (*5 points*)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM). Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Une réponse juste rapporte un point ; une réponse fausse ou l'absence de réponse n'apporte pas de point et n'en retire pas.

Relevez sur votre copie le numéro de la question ainsi que la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative (C) est la parabole donnée en annexe (dernière page du sujet). Le point A$(4\,;\,0)$ appartient à la courbe (C) et la droite (d) est la tangente à la courbe (C) au point A.

1. $f'(4) =$

a. 0 **b.** 6 **c.** $\dfrac{1}{6}$ **d.** $\dfrac{-1}{6}$

2. Pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,2]$,

a. $f'(x) \leqslant 0$ **b.** $f'(x) = 0$ **c.** $f'(x) \geqslant 0$ **d.** $f'(x) = -4$

3. La fonction f a pour expression :

a. $f(x) = (x-1)(x-4)$ **b.** $f(x) = 2x^2 - 10x$ **c.** $f(x) = -2x^2 + 8$ **d.** $f(x) = 2x^2 - 10x + 8$

4. La tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 2 a pour équation :

a. $y = 4x - 24$ **b.** $y = -2x$ **c.** $y = -2x - 4$ **d.** $y = -3x + 2$

5. La fonction $\sqrt{f}$ est

a. croissante sur $[0; +\infty[$ **b.** croissante sur $\mathbb{R}$ **c.** décroissante sur $]-\infty; 1]$ **d.** croissante sur $[2,5; +\infty[$

Exercice 2 (*7 points*)
On considère la fonction f définie sur $[0;15]$ par

$$f(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x - 500.$$

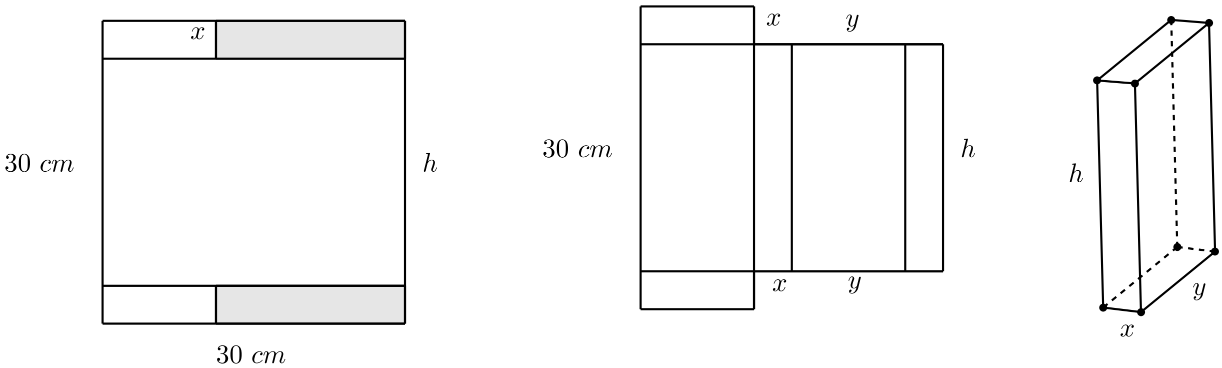
1. **a.** Calculer $f'(x)$. (**0,5 point**)

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0;15]$. (**1 point**)

   c. En déduire le tableau de variations de f sur $[0;15]$. (**0,5 point**)

   d. On admet que l'équation $f(x) = 0$ a 2 solutions distinctes dans l'intervalle $[0;15]$.
   Donner des valeurs approchées, à 10^{-1} près, de ces solutions notées α et β. (**1 point**)

2. Un fabricant envisage la production de boîtes en forme de pavé droit pour emballer des clous en découpant deux bandes de même largeur dans une feuille de carton **carrée**.
   Le côté de la feuille mesure 30 cm et on désigne par x la mesure en cm de la largeur des bandes découpées. On admet que $0 \leqslant x \leqslant 15$.



   a. Calculer le volume de la boîte si $x = 2$. (**1 point**)

   b. Justifier que le volume $V(x)$, en cm^3, de la boîte est $V(x) = (15 - x)(30 - 2x)x$. (**0,5 point**)

   c. Vérifier que le volume $V(x)$ est égal à $f(x) + 500$, où f est la fonction définie précédemment.(**1 point**)

   d. En déduire la valeur de x pour laquelle le volume de la boîte est maximal. Préciser la valeur du volume maximal. (**1 point**)

3. Le fabricant veut des boîtes de 500 cm^3. Combien a-t-il de possibilités ? Justifier la réponse. (**0,5 point**)

Exercice 3 (*6 points*)
Une urne contient n boules indiscernables au toucher : 5 boules rouges et $n - 5$ boules noires (n est un entier supérieur ou égal à 6).
Un joueur tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1. Construire un arbre pondéré décrivant cette expérience aléatoire. (**1 point**)

2. Le joueur gagne 2 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes et perd 1 euro sinon. On note A l'événement : «les deux boules tirées sont de couleurs différentes »et X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.

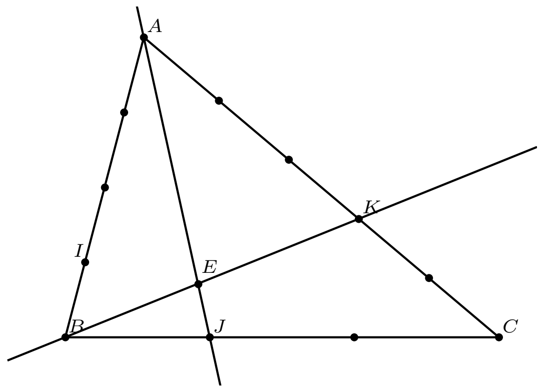
   a. Montrer que : $P(A) = \dfrac{10n - 50}{n^2 - n}$. (**1,5 point**)

   b. Déterminer la loi de probabilité de X. (**1,5 point**)

   c. Montrer que : $E(X) = \dfrac{-n^2 + 31n - 150}{n^2 - n}$. (**1 point**)

3. Comment choisir n pour que le jeu soit équitable ? (**1 point**)

Exercice 4 (*7 points*)



ABC est un triangle quelconque.
Le point I est tel que $\overrightarrow{BI} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{BA}$.
Le point J est tel que $\overrightarrow{CJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CB}$.
Le point K est tel que $\overrightarrow{AK} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC}$.

On souhaite démontrer que les droites (AJ), (BK) et (CI) sont concourantes.

Soit E le point d'intersection des droites (AJ) et (BK).

On se place dans le repère $(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

1. **a.** Donner, sans justification, les coordonnées des points B, C, A, I et J. (**1 point**)

   b. Calculer les coordonnées du point K.(**1 point**)

   Dans la suite, on admet que les coordonnées de K sont $\left(\dfrac{3}{5}; \dfrac{2}{5}\right)$.

2. **a.** Déterminer une équation cartésienne de la droite (AJ) et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme $3x + y - 1 = 0$. (**1 point**)

   b. Déterminer une équation cartésienne de la droite (BK). (**1 point**)

   c. En déduire les coordonnées du point E. (**1,5 point**)

3. Démontrer que le point E appartient à la droite (CI) et conclure.(**1,5 point**)

Exercice 5 (*5 points*)

Soit la suite U de terme général U_n définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = U_n + 2(n+1) \end{cases}$$

1. **a.** Montrer que $U_1 = 2$ et que $U_2 = 6$. Calculer U_3. (**1,5 point**)

   b. A l'aide des résultats précédents, déterminer pour chacune des deux propositions suivantes si elle est vraie ou fausse. Justifier les réponses. (**1 point**)
   Proposition 1 : «Il existe au moins une valeur de n pour laquelle $U_n = n^2 + 1$. »
   Proposition 2 : «Pour toutes les valeurs de n, on a $U_n = n^2 + 1$. »

2. On considère l'algorithme suivant :

   Début de l'algorithme
   Entrée : Saisir N un entier naturel non nul
   Initialisation : Affecter à P la valeur 0
   Traitement : Pour K allant de 0 à N :
   Affecter à P la valeur $P + K$
   Afficher P
   Fin Pour
   Fin de l'algorithme

   a. Faire fonctionner l'algorithme avec $N = 3$. Obtient-on à l'affichage les valeurs des quatre premiers termes de la suite U ? (**1,5 point**)

   b. Recopier la partie **Traitement** de cet algorithme en la modifiant, de manière à obtenir à l'affichage les valeurs des $N + 1$ premiers termes de la suite U. (**1 point**)

ANNEXE Exercice 1