Devoir de mathématiques

Exercice 1

1. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par la forme explicite $u_n = 3n + 2 \quad , \quad n \geqslant 0$.
   (a) Prouver que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite arithmétique dont on déterminera le terme initial ainsi que la raison.
   (b) Déterminer le rang du terme 263.
   (c) Calculer la somme $S = 2 + 5 + 8 + \cdots + 257 + 260 + 263$.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définie par la forme explicite $v_n = \dfrac{3n-2}{2n+1} \quad , \quad n \geqslant 0$.
   (a) Calculer les quatre premiers termes de la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$.
   (b) Prouver que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.
   (c) Prouver que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 2

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{-x^2 + x + 1}{x + 1}$.

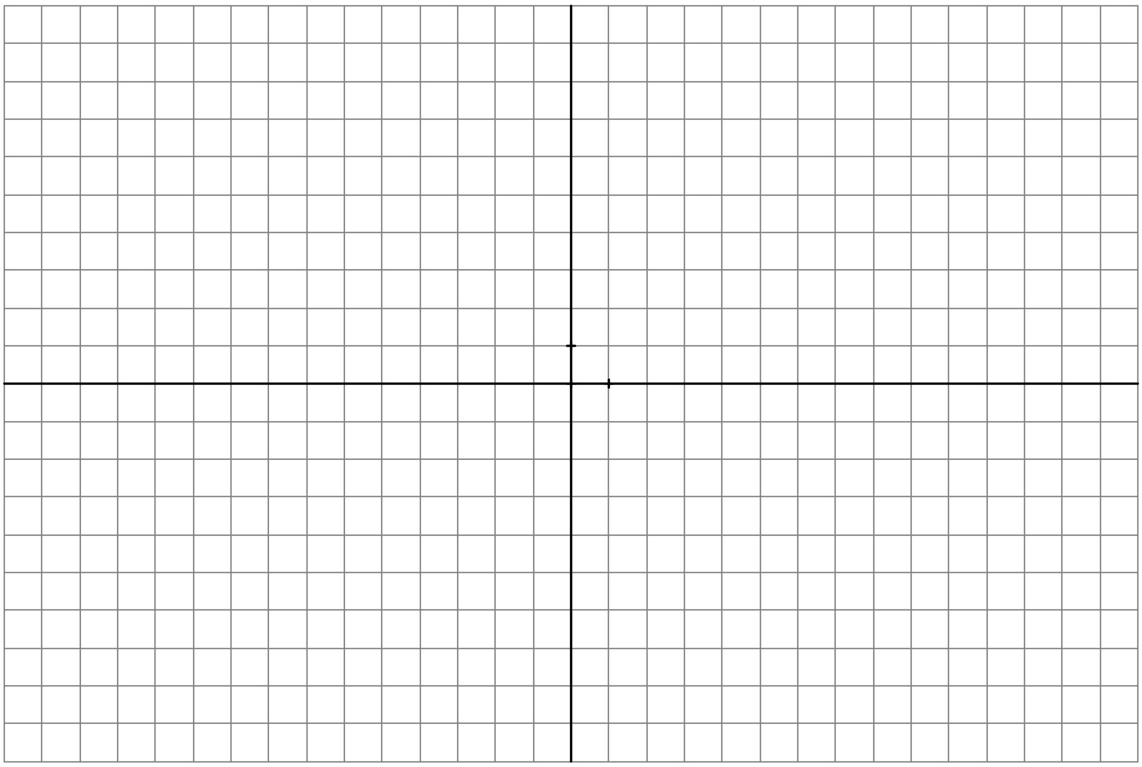
1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f ainsi que l'ensemble des réels x en lesquels la fonction est dérivable.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ en -1 par valeurs inférieures.
3. Calculer la dérivée f' de la fonction f.
4. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
5. Montrer que la droite d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$ à la courbe représentative de la fonction f.
6. Construire la courbe représentative de la fonction f avec pour unités 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée et mettre en évidence sur la figure les tangentes horizontales ainsi que les asymptotes.

Exercice 3

1. On rappelle la formule $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, démontrer la formule $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$.
2. On considère le réel $\alpha \in [0; \frac{\pi}{4}]$ tel que $\cos\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.
   (a) Calculer la valeur exacte de $\cos(2\alpha)$.
   (b) Calculer la valeur exacte de $\cos(4\alpha)$.
   (c) Prouver que $4\alpha = \pi - \alpha$ et en déduire la valeur exacte de α.

Exercice 4

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(6;2)$, $B(-6;-6)$, $\Omega(-5;-1)$, $C(-2;1)$ et $D(-8;-3)$ ainsi que le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$. Placer les points sur la figure ci-dessous qui sera complétée au fur et à mesure des questions.



1. (a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux.
   (b) Que représente le vecteur $\overrightarrow{u}$ pour la droite (AB) ? En déduire une équation cartésienne de la droite (AB).
2. (a) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{\Omega A} \, . \, \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{\Omega B} \, . \, \overrightarrow{u}$.
   (b) Pour tout point $M(x;y)$ du plan exprimer en fonction de x et y le produit scalaire $\overrightarrow{\Omega M} \, . \, \overrightarrow{u}$.
   (c) On suppose que les points M, A et B sont alignés, démontrer que $-2x+3y+6=0$ et en déduire que le produit scalaire $\overrightarrow{\Omega M} \, . \, \overrightarrow{u}$ est indépendant de x et y.
3. (a) Montrer que l'équation du cercle de diamètre $[CD]$ est $x^2+y^2+10x+2y+13=0$.
   (b) Calculer les coordonnées du (ou des) point(s) d'intersection de ce cercle avec la droite d'équation $-2x+3y=-6$.

Exercice 5

Dans le plan, on considère un segment $[AB]$ de longueur 12 cm et on cherche à déterminer l'ensemble des points M tels que $3MA^2+MB^2=144$.

1. On pose $G=\text{bar}\{(A;3),(B;1)\}$, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et calculer les longueurs GA et GB.
2. En utilisant la relation de Chasles, prouver que $4MG^2+3GA^2+GB^2=144$.
3. En déduire l'ensemble des points M cherchés puis réaliser une figure.