Lycée Prévert. Devoir commun de Mathématiques du troisième trimestre. Premières S. 28/05/14
Durée 3 heures. Calculatrice autorisée.

Toute réponse doit être justifiée. La rédaction et la présentation du devoir seront prises en compte.

EXERCICE 1 : Fonctions. Recherche d'un maximum. (8 points).

Partie A : Restitution organisée de connaissances.

On rappelle la proposition suivante :

Proposition 1 : « Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors la fonction $u\times v$ est dérivable sur I »

1. Donnez la formule de dérivation d'un produit en recopiant et complétant $(u(x)\times v(x))'=...$

2. Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x\sqrt{x}$.

a. En utilisant la proposition 1 et la question 1, montrez que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculez $f'(x)$ en détaillant tous vos calculs.

b. Étudiez la dérivabilité à droite en zéro de la fonction f.

Aide : On rappelle la condition de dérivabilité en zéro :

« Si la limite du taux d'accroissement $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$*, quand* h *tend vers zéro(* $h>0$ *), existe, alors la fonction* f *est dérivable en zéro (à droite) et* $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)$ *»*

3. Énoncez la proposition réciproque de la proposition 1 et prouvez que cette réciproque est fausse en fournissant un contre-exemple.

Partie B : Étude d'une fonction.

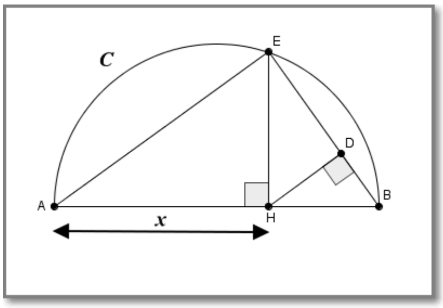
Soit g la fonction définie sur]0 ; 6[par $g(x)=(6-x)\sqrt{(x)}$ et C_g sa représentation graphique dans un repère du plan.

1. Montrez en détaillant les calculs que $g'(x)=\dfrac{-3x+6}{2\sqrt{x}}$

2. En déduire les variations de la fonction g et son maximum sur]0 ; 6[.

3. Déterminez une équation de la tangente à C_g au point d'abscisse 1.

Partie C : Application à un problème de géométrie.



On considère le demi-cercle (C) de diamètre [AB], tel que AB = 6 .

H est un point du segment [AB] distinct de A et de B. On note x la longueur AH. La perpendiculaire en H à (AB) coupe (C) en E.

D est le pied de la hauteur issue de H dans le triangle EHB.

L'objectif de cette partie est de déterminer la position de H sur le segment [AB] pour laquelle la longueur HD est maximale.

On note $HD=h(x)$

1. Quelle est la nature du triangle AEB ?

2. Prouvez que $AE=\sqrt{6x}$ en exprimant $\cos(\widehat{BAE})$ dans deux triangles rectangles différents.

3. Prouvez que $h(x)=\dfrac{\sqrt{6}}{6}(6-x)\sqrt{x}$ en utilisant $\sin(\widehat{ABE})$ dans deux triangles rectangles différents.

4. A l'aide de la partie B répondre à l'objectif.

EXERCICE 2 : Probabilités. Loi binomiale. (6 points).

Une entreprise fabrique des cartes à puce. Chaque puce peut présenter deux défauts a et b.

On prélève au hasard, une puce dans la production de la journée.

Une étude a permis de montrer que la probabilité qu'une puce prélevée au hasard ait le défaut a est 0,03 ; la probabilité qu'elle ait le défaut b est 0,02; la probabilité qu'elle ait les deux défauts est 0,0006.

Une puce est défectueuse dès qu'elle a au moins un défaut.

1. Montrez que la probabilité p que la puce soit défectueuse est 0,0494

2. Les puces sont conditionnées par lots de 100 pour un nettoyage avant montage sur la carte.

On prélève au hasard un lot de 100 puces (*on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise*).

X est la variable aléatoire, qui à chaque lot, associe le nombre de puces défectueuses.

a) Justifiez que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

b) Calculez $p(X=5)$ en écrivant la formule utilisée, puis donnez une valeur approchée à 10^{-2} près de ce résultat et donnez-en la signification.

c) Calculer la probabilité que dans ce lot, il y ait au moins une puce défectueuse. Arrondir à 10^{-2} près.

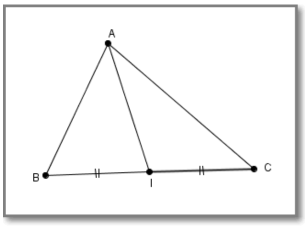
d) Quel est en moyenne le nombre de puces défectueuses dans un lot de 100 ?

3. Un monteur comptabilise 9 puces défectueuses dans un des lots. Quelle décision va-t-il prendre ?

EXERCICE 3 : Applications du produit scalaire. (6 points)

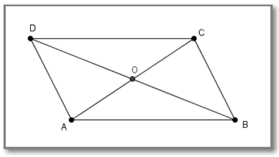
Les deux parties sont indépendantes

Partie A :



1. Démontrer, en utilisant le produit scalaire, le théorème de la médiane suivant :

$$AB^2+AC^2=2\,AI^2+\frac{BC^2}{2}$$



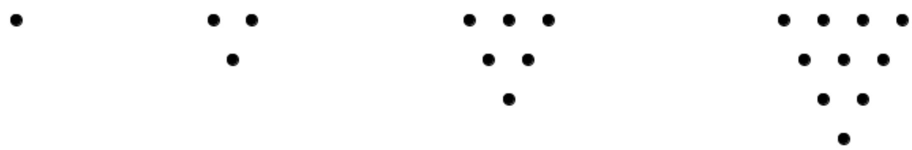
2. ABCD est un parallélogramme de centre O.
AB =15 ; BC = 13 et AC = 14 (voir ci-contre)
Démontrez que $DB=4\sqrt{37}$

Partie B : **A vous de prendre toutes les initiatives** !
Dans un repère orthonormé, la droite (d) a pour équation $2x+y+6=0$. Trouvez une équation du cercle dont le centre est situé sur la droite (d) et qui passe par les points $A(-2;3)$ et $B(4;1)$.

Bonus !!!! Algorithmes, nombres triangulaires. (2 points)

Voici les quatre premiers nombres triangulaires et leur représentation à l'aide de points :

$T_1=1$ $T_2=3$ $T_3=6$ $T_4=10$



1. Combien vaut T_5, combien vaut T_6 ?
On voudrait connaître T_{100}
2. Exprimer le nombre triangulaire T_n connaissant le nombre triangulaire précédent.
3. Écrire un algorithme permettant de calculer T_n lorsque l'entrée est n .