Correction du contrôle commun n^{o} 2

Exercice 1 (7 points)

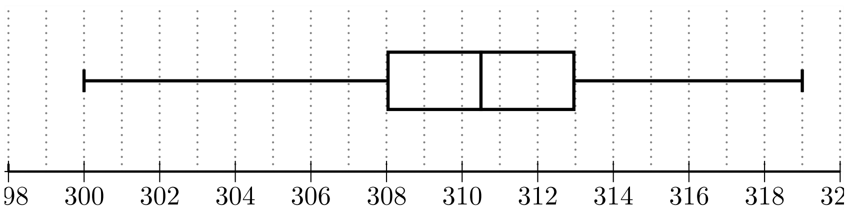
La pesée automatique d'un lot de 20 barquettes d'un produit alimentaire a donné les résultats suivants (arrondis au gramme) :

300 ;311 ;315 ;308 ;311 ;317 ;308 ;309 ;311 ;312 ;
309 ;318 ;307 ;308 ;303 ;310 ;314 ; 313 ;310 ;319.

1. Recopier et compléter le tableau d'effectifs de la série :

Poids x_i	300	303	307	308	309	310	311	312	313	314	315	317	318	319
Effectifs n_i	1	1	1	3	2	2	3	1	1	1	1	1	1	1
ECC	1	2	3	6	8	10	13	14	15	16	17	18	19	20

2. Déterminer la médiane et les quartiles de la série. Justifier.
   L'effectif total est $N = 20$ (pair).
   Donc la médiane est la demi-somme des deux valeurs centrales, la 10^{e} et la 11^{e}.
   $\boxed{Me = \dfrac{310+311}{2} = 310,5.}$
   $\dfrac{N}{4} = \dfrac{20}{4} = 5.$
   Q_1 est la 5^{e} valeur : $\boxed{Q_1 = 308.}$
   $\dfrac{3N}{4} = \dfrac{60}{20} = 15.$
   Q_3 est la 15^{e} valeur : $\boxed{Q_3 = 313.}$
3. Construire le diagramme en boîte de la série.



4. Rappeler les formules permettant de calculer la moyenne et l'écart-type d'une série statistique, puis, en utilisant le menu statistique de la calculatrice, donner la moyenne et l'écart type de la série (aucun détail de calcul n'est demandé).

$$\begin{aligned} m &= \frac{x_1n_1 + \cdots + x_pn_p}{N} \\ &= \frac{1}{20}(300 \times 1 + 303 \times 1 + \cdots + 319 \times 1) \\ &= 310,65 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= (f_1x_1^2 + \cdots + f_px_p^2) - (m)^2 \\ V &= \frac{1}{20}(300^2 + 303^2 + \cdots + 319^2) - (310,65)^2 \\ V &= 20,7275 \\ s &= \sqrt{V} \\ s &\approx 4,55 \end{aligned}$$

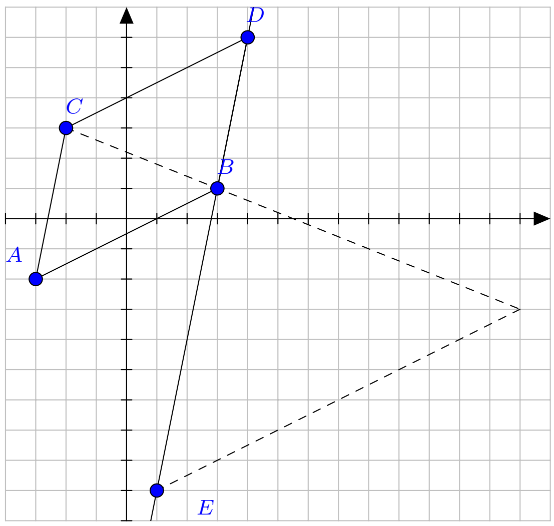
5. Un lot est accepté si les trois conditions suivantes sont remplies :
   — Le poids moyen m d'une barquette est de 310 g à 1 g près ;
   — l'écart-type s des poids est inférieur à 5 g ;

— au moins 80 % des poids sont dans l'intervalle $[m-s ; m+s]$
Qu'en est-il pour ce lot ?
Il est clair que les deux premières contraintes sont respectées.
Il reste à déterminer le pourcentage de valeurs dans l'intervalle $[m-s ; m+s]$.
$m-s \approx 310,65-4,55 \approx 306,1$.
$m+s \approx 310,65+4,55 \approx 315,2$.
Il y a 5 valeurs en dehors de l'intervalle $[m-s ; m+s]$, ce qui revient à dire qu'il y a 15 valeurs dans cet intervalle.
$\frac{15}{20} \times 100 = 75$.
Il y a 75 % des poids dans l'intervalle $[m-s ; m+s]$.
$\boxed{\text{On ne peut pas accepter ce lot à cause de la 3}^{\text{e}}\text{ contrainte.}}$

Exercice 2 (4,5 points)
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(-3;-2)$, $B(3;1)$ et $C(-2;3)$.
On fera une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice

1. Calculer les coordonnées du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.
$ABDC$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$.
$\overrightarrow{AB}\binom{3+3}{1+2}=\binom{6}{3}$ et $\overrightarrow{CD}\binom{x_D+2}{y_D-3}$.
D'où le système $\begin{cases} x_D+2=6 \\ y_D-3=3 \end{cases}$, donc $\begin{cases} x_D=4 \\ y_D=6 \end{cases}$
$\boxed{D \text{ a pour coordonnées } (4;6).}$

2. (a) Placer le point E tel que $\overrightarrow{CE}=3\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{AB}$.
Lire les coordonnées du point E sur le graphique.



$\boxed{\text{Graphiquement, on constate que } E \text{ a pour coordonnées } (1;-9).}$

(b) Retrouver les coordonnées de E par le calcul.
$\overrightarrow{CB}\binom{3+2}{1-3}=\binom{5}{-2}$ et $\overrightarrow{AB}\binom{6}{3}$, donc $3\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{AB}\binom{15-12}{-6-6}=\binom{3}{-12}$.
$\overrightarrow{CE}\binom{x_E+2}{y_E-3}$. Or $\overrightarrow{CE}=3\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{AB}$, d'où
$\begin{cases} x_E+2=3 \\ y_E-3=-12 \end{cases}$, donc $\begin{cases} x_D=1 \\ y_D=-9 \end{cases}$
$\boxed{E \text{ a pour coordonnées } (1;-9).}$

3. Montrer que les points B, D et E sont alignés.
$\overrightarrow{BD}\binom{4-3}{6-1}=\binom{1}{5}$ et $\overrightarrow{BE}\binom{1-3}{-9-1}=\binom{-2}{-10}$
$\boxed{\text{On constate que } \overrightarrow{BE}=-2\overrightarrow{BD}\text{, donc } \overrightarrow{BE} \text{ et } \overrightarrow{BD} \text{ sont colinéaires, donc les points } B, D \text{ et } E \text{ sont alignés.}}$

Exercice 3 (3,5 points)
On se place dans un repère du plan.
On considère les points $A(-2;4)$, $B(3;1)$ et $C(-1;2)$, et la droite Δ d'équation $2x+y-7=0$.

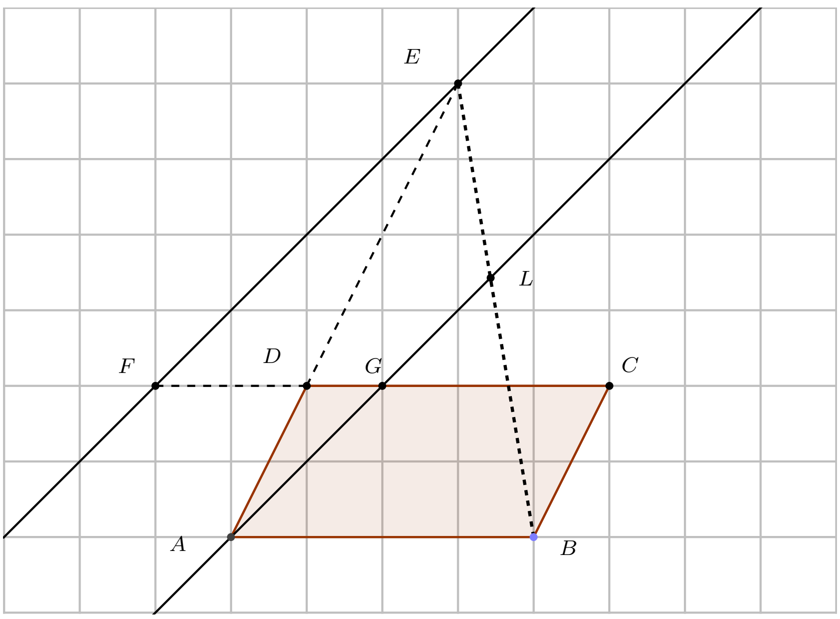
1. Justifier que Δ passe par B.
   $2x_B+y_B-7=2\times 3+1-7=0$.
   $\boxed{\text{Donc } B\in\Delta.}$
2. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de Δ.
   $\boxed{\Delta \text{ est dirigée par le vecteur } \overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}.}$
3. Montrer que les doites (AC) et Δ sont parallèles.
   $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.
   $\boxed{\text{On a } \overrightarrow{u}=-\overrightarrow{AC}\text{, donc } \overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ sont colinéaires, et } (AC)//\Delta.}$
4. Déterminer une équation de la droite (d) parallèle à (BC) passant par A.
   (d) est la droite passant par A et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{BC}$.
   Soit $M(x;y)$ un point du plan.
   $M(x;y)\in(d)$ ssi $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$ sont colinéaires.
   $M(x;y)\in(d)$ ssi $(x+2)\times 1-(y-4)\times(-4)=0$, soit $x+4y-14=0$.
   $\boxed{\text{Une équation de } (d) \text{ est } x+4y-14=0.}$

Exercice 4
Soit $ABCD$ un parallélogramme. Les points E, F et G sont définis par :

$$\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{CF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CD},\text{ et } 3\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}.$$

1.
$$\begin{aligned}3\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GC}&=\overrightarrow{0}\\3\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{DC}&=\overrightarrow{0}\\4\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{DC}&=\overrightarrow{0}\\4\overrightarrow{DG}&=\overrightarrow{DC}\\\overrightarrow{DG}&=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}\end{aligned}$$

2. Figure



3.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{FE} &= \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} \\
&= -\frac{3}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{AD} \\
&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{AD} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}
\end{aligned}$$

En effet, $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$ car $ABCD$ est un parallélogramme.

4.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} \\
&= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DC} \\
&= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \\
&= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}
\end{aligned}$$

De même, comme $ABCD$ est un parallélogramme, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

5. On remarque que $\overrightarrow{FE} = 2\overrightarrow{AG}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires, donc $(AG)//(FE)$.

6. Question bonus :
Les points E, L et B sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{EL}$ et $\overrightarrow{EB}$ sont colinéaires.
On va exprimer ces deux vecteurs en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{EL} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AL} \\
&= \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA} + m\overrightarrow{AG} \\
&= -2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} + m\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \\
&= \frac{m}{4}\overrightarrow{AB} + (m-3)\overrightarrow{AD}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{EB} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} \\
&= \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} \\
&= \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AD}
\end{aligned}$$

On rappelle $\overrightarrow{EL} = \frac{m}{4}\overrightarrow{AB} + (m-3)\overrightarrow{AD}$.
D'après ces décompositions, les vecteurs $\overrightarrow{EL}$ et $\overrightarrow{EB}$ sont colinéaires si et seulement si $\overrightarrow{EL} = \frac{m}{4}\overrightarrow{EB}$, ce qui revient à

$$\begin{aligned}
-3 \times \frac{m}{4} &= m - 3 \\
-3m &= 4m - 12 \\
7m &= 12 \\
m &= \frac{12}{7}
\end{aligned}$$

Conclusion : Les points E, L et B sont alignés si et seulement si $m = \frac{12}{7}$, soit $\overrightarrow{AL} = \frac{12}{7}\overrightarrow{AG}$.

Exercice 5 (bonus - 1,5 points)
On considère la série statistique formée des valeurs entières suivantes :

$$6, 6, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 17$$

En remplaçant une valeur par une autre valeur entière, on souhaite rendre l'écart-type le plus petit possible. Quelle modification faut-il faire ?
Sur la série de départ, à l'aide de la calculatrice, on obtient comme moyenne $\overline{x} \approx 11,11$.
L'écart-type décrit de la dispersion par rapport à la moyenne.
Pour réduire au maximum l'écart-type, on remplace la valeur de la série la plus éloignée de la moyenne : le 17.
On le remplace par l'entier le plus proche de la moyenne de la série constituée des nombres une fois qu'on a enlevé le 17. La moyenne devient alors 10,375.
$\boxed{\text{On remplace donc le 17 par un 10.}}$