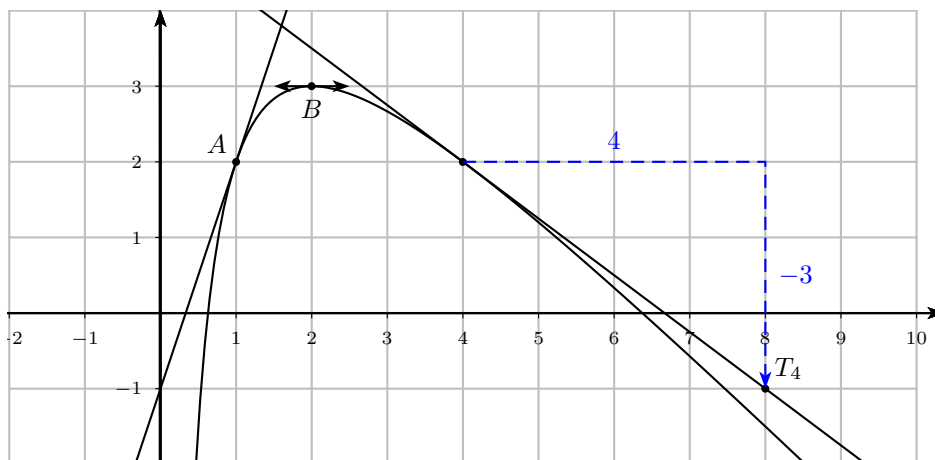


Correction du contrôle de mathématiques n° 3

Exercice 1 (4 points)

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $]0; +\infty[$. On a tracé les tangentes à la courbe de f aux points A et B .



1. Lire graphiquement $f(1)$ et $f(2)$.

$$\boxed{f(1) = 2 \text{ et } f(2) = 3.}$$

2. Déterminer deux nombres dérivés de f à l'aide du graphique. Justifier.

$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente au point $A(1; 2)$. $\boxed{\text{On lit } f'(1) = 3.}$

$f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente en B . Comme elle est parallèle à l'axe des abscisses, son coefficient directeur est nul et donc $\boxed{f'(2) = 0.}$

3. On admet désormais que pour tout $x > 0$, $f(x) = -x + 7 - \frac{4}{x}$.

- (a) Justifier que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{(2-x)(2+x)}{x^2}$.

Pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = -1 - 4 \times \frac{-1}{x^2} = -1 + \frac{4}{x^2} = \frac{4 - x^2}{x^2} = \frac{(2-x)(2+x)}{x^2}.$$

- (b) Vérifier que $f'(4) = -\frac{3}{4}$.

$$f'(4) = -1 + \frac{4}{4^2} = -1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}.$$

- (c) Tracer la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 4. Aucune justification n'est attendue.

Exercice 2 (6 points)

Soit f la fonction dérivable définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^2 + 4x + 1$. On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère.

1. Calculer la dérivée $f'(x)$ de f pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Comme toute fonction polynôme, f est dérivable sur \mathbb{R} .

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2x + 4.}$$

2. Montrer que la tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 1 est la droite d'équation $y = 2x + 2$.

La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$.

$f'(1) = -2 + 4 = 2$, et $f(1) = -1 + 4 + 1 = 4$.

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$y = 2(x - 1) + 4$$

$$y = 2x + 2$$

$\boxed{\text{La tangente à } \mathcal{C} \text{ au point d'abscisse 1 a bien pour équation } y = 2x + 2.}$

3. Pour tout nombre réel a , on note T_a la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse a .

- (a) Déterminer a pour que T_a soit parallèle à la droite (d) d'équation

$$y = -4x + 1.$$

Les droites T_a et (d) sont parallèles ssi elles ont le même coefficient directeur, ce qui revient à $f'(a) = -4$.

D'où $-2a + 4 = -4$, $-2a = -8$, et $a = 4$.

Il y a une unique tangente parallèle à (d) , c'est la tangente au point d'abscisse 4.

- (b) Justifier que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la tangente T_a a pour équation

$$y = (-2a + 4)x + a^2 + 1.$$

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y &= f'(a)(x - a) + f(a) \\ y &= (-2a + 4)(x - a) + (-a^2 + 4a + 1) \\ y &= (-2a + 4)x + 2a^2 - 4a - a^2 + 4a + 1 \\ y &= (-2a + 4)x + a^2 + 1 \end{aligned}$$

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, T_a a pour équation $y = (-2a + 4)x + a^2 + 1$.

- (c) En déduire qu'il existe 2 tangentes à \mathcal{C} passant par le point $K(3; 8)$.

$K(3; 8) \in T_a$ ssi $8 = (-2a + 4) \times 3 + a^2 + 1$, soit $a^2 - 6a + 5 = 0$.

C'est une équation du second degré avec pour inconnue a .

$$\Delta = 36 - 4 \times 5 = 16 > 0.$$

Il y a 2 solutions.

$$a_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 - 4}{2} = 1.$$

$$a_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 + 4}{2} = 5.$$

Il y a 2 tangentes à \mathcal{C} qui passent par le point $K(3; 8)$, ce sont T_1 et T_5 .

- (d) Pour chacune de ces tangentes, donner une équation et les coordonnées du point de contact avec la courbe.

— Pour la tangente T_1 au point d'abscisse 1, $f(1) = -1 + 4 + 1 = 4$.

Le point de contact entre \mathcal{C} et T_1 est $A(1; 4)$.

On a déjà vu à la question 2 que T_1 a pour équation $y = 2x + 2$.

— Pour la tangente T_5 au point d'abscisse 5, $f(5) = -5^2 + 5 \times 5 + 1 = -25 + 20 + 1 = -4$.

Le point de contact est $B(5; -4)$.

En remplaçant a par 5 dans l'équation de T_a , il vient

$$y = (-2 \times 5 + 4)x + 5^2 + 1 = -6x + 26.$$

T_5 a pour équation $y = -6x + 26$.

Exercice 3 (6 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout n de \mathbb{N} , $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{(u_n)^2 + 1}$.

1. Calculer, en précisant vos calculs, u_1 et u_2 (on donnera des valeurs exactes).

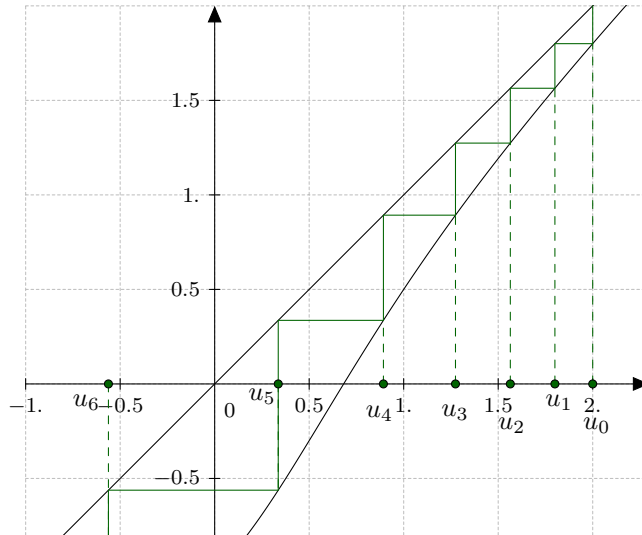
$$u_1 = u_0 - \frac{1}{(u_0)^2 + 1} = 2 - \frac{1}{4 + 1} = 2 - \frac{1}{5} = \frac{9}{5}$$

$$u_2 = u_1 - \frac{1}{(u_1)^2 + 1} = \frac{9}{5} - \frac{1}{\frac{81}{25} + 1} = \frac{9}{5} - \frac{25}{106} = \frac{829}{530}$$

2. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté la courbe représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x - \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Représenter sur ce graphique les 6 premiers termes de la suite (u_n) .



3. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) (On démontrera sa réponse).

Pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n = u_n - \frac{1}{(u_n)^2 + 1} - u_n = -\frac{1}{(u_n)^2 + 1} < 0$ (car $(u_n)^2 + 1 > 0$).

Donc (u_n) est décroissante.

4. Écrire un algorithme qui calcule et affiche la valeur de u_n pour un entier n supérieur ou égal à 1 donné en entrée.

```

DÉBUT
Entrer N
U prend la valeur 2
Pour K allant de 1 à N
U prend la valeur U - 1/(U^2 + 1)
Fin Pour
Afficher U
FIN

```

5. Donner une valeur approchée de u_{50} arrondie à 10^{-2} . $u_{50} = -4,98$
 6. Compléter l'algorithme suivant qui détermine et affiche le plus petit entier p tel que $u_p < -6$.

```

variable U est un réel. n est un entier
entrée n prend la valeur 0
U prend la valeur 2
traitement
Tant que U ≥ -6 faire
N prend la valeur N + 1
U prend la valeur U - 1/(U^2 + 1)
Fin Tant que
sortie afficher N

```

7. Programmer cet algorithme à la calculatrice et donner la valeur de p .
 le plus petit entier p tel que $u_p < -6$ est $p = 82$.
 8. Peut-on affirmer que pour tout $n \geq p$, $u_n < -6$? Justifier.
 Comme $u_{82} < -6$ et (u_n) est décroissante, pour tout $n \geq 82$, $u_n \leq u_{82} < -6$.

Oui, on peut affirmer que u_n est strictement inférieur à -6 pour tout entier n à partir de 82.

Exercice 4 (4 points)

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse.

1. Soit (U_n) la suite définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $U_n = \frac{6n - 1}{n + 2}$.

(a) « $U_2 = \frac{5}{2}$ »

Faux.
 $U_2 = \frac{6 \times 2 - 1}{2 + 2} = \frac{11}{4} \neq \frac{5}{2}$.

(b) « (U_n) est majorée par 6 »

Vrai.

$$\text{Pour tout } n \geq 0, U_n - 6 = \frac{6n-1}{n+2} - \frac{6n+12}{n+2} = \frac{-13}{n+2} < 0.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n < 6$. (U_n) est majorée par 6.

(c) « (U_n) est minorée »

Vrai.

En observant les premiers termes de la suite à la calculatrice, il semble que (U_n) soit croissante, minorée par son premier terme $-0,5$.

Pour tout $n \geq 0$,

$$U_n - (-0,5) = \frac{6n-1}{n+2} + \frac{1}{2} = \frac{12n-2}{2(n+2)} + \frac{n+2}{2(n+2)} = \frac{13n}{2(n+2)} \geq 0.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n - (-0,5) \geq 0$.

(U_n) est minorée par $-0,5$.

2. Soit (V_n) la suite définie par $V_0 = 4$ et pour tout $n \geq 0$, $V_{n+1} = V_n - 2n + 5$.

(a) « $V_2 = 12$ »

Vrai.

$$V_1 = V_0 - 2 \times 0 + 5 = 4 - 0 + 5 = 9.$$

$$V_2 = V_1 - 2 \times 1 + 5 = 9 - 2 + 5 = 12.$$

(b) « (V_n) est croissante. »

Faux.

$V_{n+1} - V_n = -2n + 5$ qui n'est pas toujours positif.

On va montrer que la suite n'est pas croissante en donnant un contre-exemple.

$$V_3 = V_2 - 2 \times 2 + 5 = 13.$$

$$V_4 = V_3 - 2 \times 3 + 5 = 12.$$

Comme $V_4 < V_3$, la suite (V_n) n'est pas croissante.

Exercice 5 (bonus, 2 points)

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$.

1. Calculer l'expression de $f'(x)$ pour tout $x > 0$.

Posons $u(x) = x$, et $v(x) = \sqrt{x}$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $]0; +\infty[$, donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ par produit de fonctions dérivables.

$$\text{Pour tout } x > 0, f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3\sqrt{x}}{2}.$$

2. f est-elle dérivable en 0? Si oui donner son nombre dérivé en 0. Justifier.

Soit $h > 0$.

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h\sqrt{h}}{h} = \sqrt{h}.$$

$$\text{Donc } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 0.$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

3. Vrai-Faux. Justifier si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

(a) « La tangente au point d'abscisse 1 passe par $B(3; 4)$ »

Vrai.

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = \frac{3}{2}(x-1) + 1 = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Or, en remplaçant x par 3, il vient :

$$\frac{3}{2} \times 3 - \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4 = y_B.$$

Donc la tangente au point d'abscisse 1 passe par B .

(b) « Il existe au moins une tangente parallèle à la droite d'équation

$$y = -2x + 5 \text{ »}$$

Faux.

La tangente est parallèle à cette droite si elle a le même coefficient directeur, -2 .

On résout l'équation $f'(x) = -2$, soit $\frac{3}{2}\sqrt{x} = -2$.

Une racine carrée est toujours positive ou nulle, cette équation n'a pas de solution.

Il n'y a aucune tangente parallèle à la droite d'équation $y = -2x + 5$.