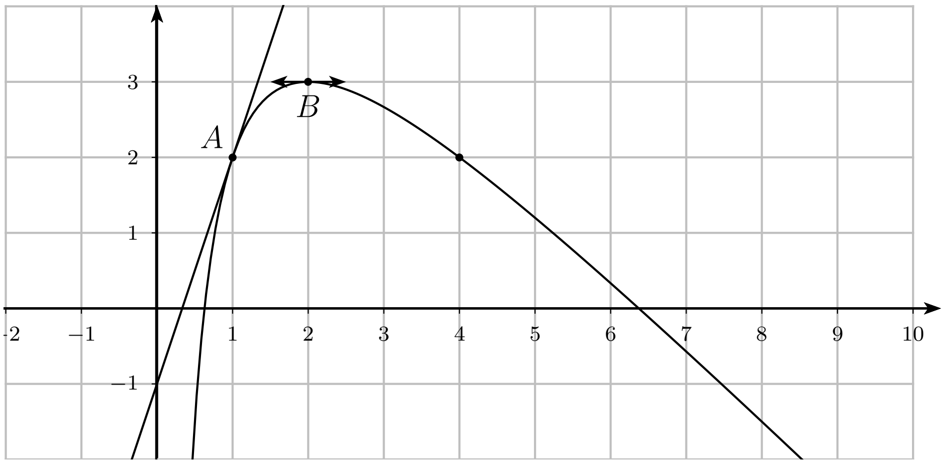
Contrôle de mathématiques n° 3

Exercice 1 (4 points)

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$. On a tracé les tangentes à la courbe de f aux points A et B.



1. Lire graphiquement $f(1)$ et $f(2)$.
2. Déterminer deux nombres dérivés de f à l'aide du graphique. Justifier.
3. On admet désormais que pour tout $x > 0$, $f(x) = -x + 7 - \dfrac{4}{x}$.
   (a) Justifier que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{(2-x)(2+x)}{x^2}$.
   (b) Vérifier que $f'(4) = -\dfrac{3}{4}$.
   (c) Tracer la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 4. Aucune justification n'est attendue.

Exercice 2 (6 points)

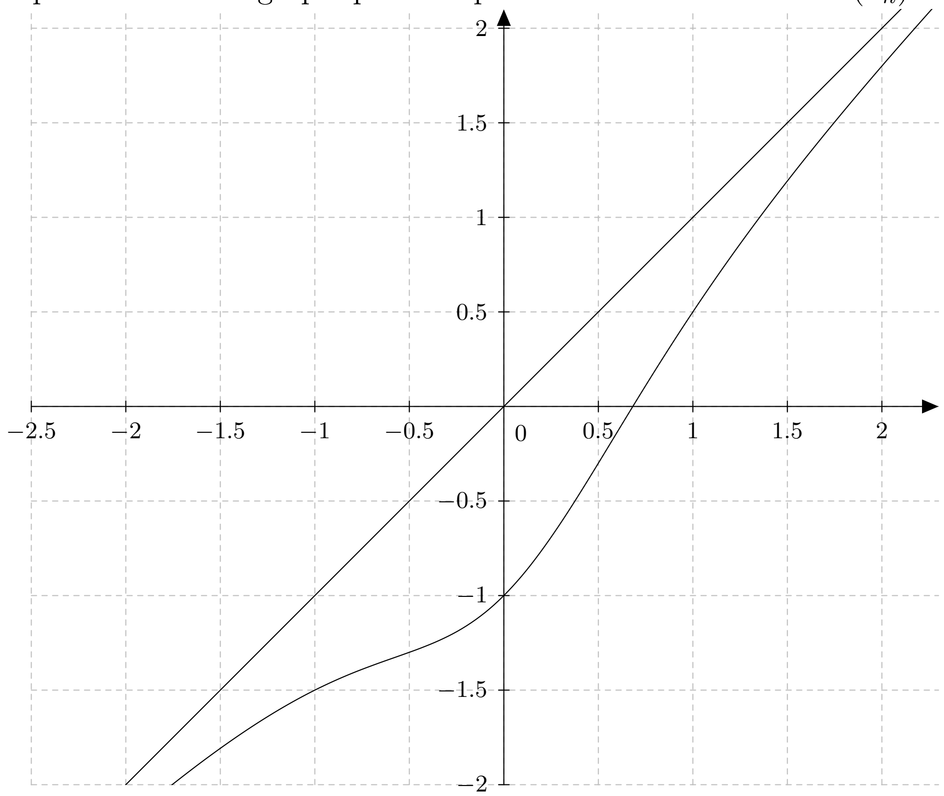
Soit f la fonction dérivable définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x + 1$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminer une expression de $f'(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est la droite d'équation $y = 2x + 2$.
3. Pour tout nombre réel a, on note T_a la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.
   (a) Déterminer a pour que T_a soit parallèle à la droite (d) d'équation
   $$y = -4x + 1.$$
   (b) Justifier que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la tangente T_a a pour équation
   $$y = (-2a+4)x + a^2 + 1.$$
   (c) En déduire qu'il existe 2 tangentes à $\mathscr{C}$ passant par le point $K(3;8)$.
   (d) Pour chacune de ces tangentes, donner une équation et les coordonnées du point de contact avec la courbe.

Exercice 3 (6 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{(u_n)^2+1}$.

1. Calculer, en précisant vos calculs, u_1 et u_2 (on donnera des valeur exactes).
2. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \dfrac{1}{x^2+1}$.
   Représenter sur ce graphique les 6 premiers termes de la suite (u_n).



3. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) (On démontrera sa réponse).
4. Écrire un algorithme qui calcule et affiche la valeur de u_n pour un entier n supérieur ou égal à 1 donné en entrée.
5. Donner une valeur approchée de u_{50} arrondie à 10^{-2}.
6. Compléter l'algorithme suivant qui qui détermine et affiche le plus petit entier p tel que $u_p < -6$.

variable	U est un réel. n est un entier
entrée	n prend la valeur 0
	U prend la valeur ...
traitement	
Tant que .... **faire**	
....	
....	
Fin Tant que	
sortie	afficher ...

7. Programmer cet algorithme à la calculatrice et donner la valeur de p.
8. Peut-on affirmer que pour tout $n \geqslant p$, $u_n < -6$? Justifier.

Exercice 4 (4 points)
Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse.

1. Soit (U_n) la suite définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $U_n = \dfrac{6n-1}{n+2}$.
   (a) « $U_2 = \dfrac{5}{2}$ »
   (b) « (U_n) est majorée par 6 »
   (c) « (U_n) est minorée »
2. Soit (V_n) la suite définie par $V_0 = 4$ et pour tout $n \geqslant 0$, $V_{n+1} = V_n - 2n + 5$.
   (a) « $V_2 = 12$ »
   (b) « (V_n) est croissante »

Exercice 5 (bonus, 2 points)
Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$.

1. Calculer l'expression de $f'(x)$ pour tout $x > 0$.
2. f est-elle dérivable en 0 ? Si oui donner son nombre dérivé en 0. Justifier.
3. Vrai-Faux. Justifier si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
   (a) « La tangente au point d'abscisse 1 passe par $B(3; 4)$ »
   (b) « Il existe au moins une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -2x + 5$ »